

ISSN 2076-5886

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Черкаський національний університет
Імені Богдана Хмельницького

ВІСНИК ЧЕРКАСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

**Серія
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА.
ІНФОРМАТИКА**

Науковий журнал

Виходить 40 разів на рік

Заснований у березні 1997 року

№ 18 (311).2014

Черкаси – 2014

Науковий журнал містить статті, в яких розглядаються проблеми фізико-математичних та технічних наук.

Для широкого кола математиків та інформатиків – науковців, викладачів, аспірантів, студентів та пошукачів.

Постановою президії ВАК України від 26.05.2010 р. № 1-05/4 (Бюлетень ВАК України, 2010, № 6) журнал включено до переліку наукових фахових видань зі спеціальності «Прикладна математика» та «Інформатика».

Журнал рекомендовано до друку вченою радою Черкаського національного університету (протокол № 1 від 29.08.2013 р.)

Головна редакційна колегія:

д.пед.н., проф., чл.-кор. НАПНУ А.І. Кузьмінський (головний редактор), д.пед.н., проф. Н.А. Тарасенкова (заступник головного редактора), к.ф.-м.н., доц. О.О. Богатирьов (відповідальний секретар), д.б.н., проф., чл.-кор. НАПНУ Ф.Ф. Боечко, д.ф.-м.н., проф. А.М. Гусак, д.е.н., проф. І.І. Кукурудза, д.б.н., проф. В.С. Лизогуб, д.філос.н., проф. О.В. Марченко, д.і.н., проф. В.В. Масненко, д.х.н., проф. Б.П. Мінаєв, д.філол.н., проф. О.О. Селіванова, д.філол.н., проф. В.Т. Поліщук, д.т.н., проф. А.Ю. Чабан.

Редакційна колегія серії:

Головня Б.П., д.т.н., (відповідальний редактор); Гришко Л.В., к.пед.н., доц. (відповідальний секретар); Гусак А.М., д.ф.-м.н., проф.; Соловйов В.М., д.ф.-м.н., проф.; Стеблянюк П.О., д.ф.-м.н., проф.; Лагно В.І., д.ф.-м.н., проф.; Мовчан В.Т., д.ф.-м.н., проф.; Кузьмук В.В., д.т.н., проф.; Тесля Ю.М., д.т.н., проф.; Златкін А.А., д.т.н., проф.; Єршов С.В., д.т.н., проф.; Гаєв Є.О., д.т.н., проф.; Leszczyński H., prof., dr hab; Danielewski M., prof., dr hab., inż; Заурбеков Н.С., д.т.н., проф; Шрайбер О.А., д.т.н., проф.; Круковський П.Г., д.т.н., проф.; Приходько О.А., д.ф.-м.н., проф.; Богатирьов О.О., к.ф.-м.н., доц.; Авраменко В.С., к.ф.-м.н., доц.; Лещенко Ю.Ю., к.ф.-м.н., доц.; Онищенко Б.О., к.ф.-м.н., доц.; Супруненко О.О., к.т.н., доц.

За зміст публікації відповідальність несуть автори.

**Засновник – Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького**

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16161-4633 ПР від 11.12.2009 р.

Адреса редакційної колегії:

18000, Черкаси, бульвар Шевченка, 79, Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького, математичний факультет, кафедра прикладної математики та інформатики. Тел (0472) 36-13-55.

© Черкаський національний
університет, 2014

СЕКЦІЯ «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

УДК 519.856

О.О. Ємець, Т.М.Барболіна

ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ
ДИРЕКТОРА ЗІ СТОХАСТИЧНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

У роботі побудовано математичну модель задачі директора зі стохастичними параметрами як лінійної безумовної задачі стохастичної оптимізації на переставленнях. Формування критерію оптимальності здійснено на основі введення лінійного порядку на множині дискретних випадкових величин. Досліджено властивості розв'язку поставленої задачі.

Ключові слова: дискретна випадкова величина, задача директора, комбінаторна оптимізація, лінійний порядок, стохастична оптимізація.

Вступ

Імовірнісний характер початкових даних, що має місце у багатьох практичних задачах, звертає увагу дослідників на розвиток моделей і методів теорії ймовірностей та стохастичного програмування (див., наприклад, [1]–[4]). Дослідження методів розв'язування оптимізаційних задач на множинах комбінаторної природи з урахуванням різних видів невизначеності, здійснюється, у тому числі, і в рамках евклідової комбінаторної оптимізації. Запропоновано підходи до постановки та розв'язування задач з інтервальною [5], нечіткою невизначеністю [6]. Актуальним залишається пошук методів розв'язування задач в умовах імовірнісної невизначеності.

Розглянемо необхідні поняття й означення евклідової комбінаторної оптимізації, спираючись переважно на [7]. Мультимножиною називають сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові. Будь-яку мультимножину $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ можна задати її основою $S(G)$, тобто кортежем усіх її різних елементів, і кратністю – числом повторів кожного елемента основи. Евклідовою комбінаторною множиною називають множину, різними елементами якої є різні упорядковані k -вибірки з мультимножини вигляду:

$$(g_{i_1}, \dots, g_{i_k}), \quad (1)$$

де $g_{i_j} \in G$, $i_j \neq i_t \ \forall j, t \in J_k$ (тут і далі через J_n позначено множину n перших натуральних чисел). Прикладом евклідової комбінаторної множини є загальна множина переставлень $E_k(G)$ — множина k -вбірок вигляду (1) з мультимножини G за умови $k = n$.

Апарат евклідової комбінаторної оптимізації успішно використовується для формалізації й розв'язування ряду практично значущих задач. Зокрема, як лінійна безумовна задача на переставленнях може бути сформульована задача директора [8]. У приймальній директора знаходиться k відвідувачів. Очікуваний час приймання i -го відвідувача дорівнює g_i . Необхідно встановити порядок приймання відвідувачів таким

чином, щоб сумарний час очікування прийому був мінімальним. Нехай x_j – час прийому відвідувача, який буде прийнятий j -м у черзі. Тоді, очевидно, вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ є елементом множини переставлень з мультимножини $G = \{g_1, \dots, g_k\}$: $x \in E_k(G)$. Сумарний час очікування дорівнює:

$$L'(x) = (k-1)x_1 + (k-2)x_2 + \dots + x_{k-1} = \sum_{j=1}^k (k-j)x_j \quad (2)$$

Отже, задача полягає у знаходженні такої пари $\langle L'(x^*), x^* \rangle$, що

$$L'(x^*) = \min_{x \in E_k(G)} \sum_{j=1}^k (k-j)x_j, \quad x^* = \arg \min_{x \in E_k(G)} \sum_{j=1}^k (k-j)x_j.$$

Як впливає з [8], у випадку, коли елементи мультимножини упорядковані за неспаданням:

$$g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_k, \quad (3)$$

мінімум цільової функції досягається у точці

$$x_i^* = g_i \quad \forall i \in J_k. \quad (4)$$

Недоліком розглянутої моделі є відсутність урахування невизначеності в оцінюванні часу прийому відвідувачів.

Мета статті

Побудувати математичну модель задачі директора для випадку, коли очікуваний час прийому відвідувача є дискретною випадковою величиною; дослідити властивості розв'язку такої задачі. Постановка оптимізаційної задачі здійснюється на основі запропонованого в [9] підходу, який ґрунтується на введенні порядку на множині дискретних випадкових величин.

Виклад основного матеріалу

Надалі позначатимемо дискретні випадкові величини великими латинськими літерами (A, B) , їх можливі значення – малими (a^i, b^i) . Розглядатимемо ті випадкові величини, серед можливих значень яких існує найменше (множину таких випадкових величин позначимо Ω). Вважатимемо, що можливі значення впорядковані за зростанням, причому найменше значення має індекс 1.

Нехай через $P(\cdot)$ позначається імовірність випадкової події, а через $M(A)$ і $D(A)$ – відповідно математичне сподівання і дисперсія дискретної випадкової величини A . Нехай також порядок на множині дискретних випадкових величин встановлено згідно з наступними означеннями.

Означення 1. Називатимемо дві дискретні випадкові величини A, B упорядкованими у зростаючому (A передуює B) порядку $\prec$ (і позначатимемо цей факт $A \prec B$), якщо виконується одна з таких умов:

1. $M(A) < M(B)$;
2. $M(A) = M(B)$ і $D(A) > D(B)$;
3. $M(A) = M(B)$, $D(A) = D(B)$ і знайдеться таке t , що для всіх $1 \leq i < t$ $a^i = b^i$, $P(A = a^i) = P(B = b^i)$ і при цьому:
 - 3.1. або $a^t < b^t$,
 - 3.2. або $a^t = b^t$ і $P(A = a^t) > P(B = b^t)$.

Означення 2. Називатимемо дві дискретні випадкові величини A, B упорядкованими у неспадаючому порядку $\preceq$ (і позначатимемо цей факт $A \preceq B$), якщо $A \prec B$ або $A = B$.

Аналогічно до того, як це зроблено в [9], легко показати, що відношення, введене в означенні 2, є лінійним порядком на множині Ω тих дискретних випадкових величин, серед можливих значень яких існує найменше. Також, якщо для дискретних випадкових величин A і B виконується умова $A \preceq B$ і величини A і C , B і C – незалежні, то має місце співвідношення $A + C \preceq B + C$. З останньої властивості випливає справедливність такого твердження:

Твердження 1. Якщо для попарно незалежних дискретних випадкових величин A, B, C, D виконуються умови $A \preceq B$ і $C \preceq D$, то також має місце співвідношення $A + C \preceq B + D$.

Доведення. З умови $A \preceq B$ і незалежності випадкових величин A і C , B і C маємо $A + C \preceq B + C$. Аналогічно з $C \preceq D$ випливає $B + C \preceq B + D$. Тоді з транзитивності відношення $\preceq$ маємо, що $A + C \preceq B + D$. Твердження доведено.

Наслідок 2. Якщо для попарно незалежних випадкових величин $A_1, \dots, A_n$ і $B_1, \dots, B_n$ виконуються умови $A_i \preceq B_i \quad \forall i \in J_n$, то $A_1 + \dots + A_n \preceq B_1 + \dots + B_n$.

Використовуючи введений в означенні 2 порядок, упорядкуємо елементи заданої скінченної множини дискретних випадкових величин $\omega \subset \Omega$: $X_1 \preceq X_2 \preceq \dots \preceq X_s$. Максимумом є величина X_s , а мінімумом — величина X_1 .

Нехай $X = (X_1, \dots, X_k)$ – багатовимірна випадкова величина, $C(X) = \sum_{j=1}^k c_j X_j$.

Зрозуміло, що коли $X_1, \dots, X_k \in \Omega$, то також $C(X) \in \Omega$. Розглянемо розв'язування лінійної безумовної евклідової задачі комбінаторної оптимізації на переставленнях

$$C(X^*) = \min_{X \in E_k(\Gamma)} \sum_{j=1}^k c_j X_j, \quad X^* = \arg \min_{X \in E_k(\Gamma)} \sum_{j=1}^k c_j X_j, \quad (5)$$

якщо для елементів мультимножини $\Gamma = \{G_1, \dots, G_k\}$ виконується умова $G_i \in \Omega \quad \forall i \in J_k$, а мінімум визначається згідно з описаним вище правилом.

Сформуємо для дискретної випадкової величини A вектор $H(A) = (M(A); -D(A))$. Через $\prec$ позначатимемо лексикографічне упорядкування в m -

вимірному евклідовому просторі: для будь-яких $u, u' \in R^m$ $u \overset{l}{<} u'$, якщо перша ненульова компонента різниці $u - u'$ є від'ємною. Якщо $u \overset{l}{<} u'$ або $u = u'$, то записуватимемо $u \overset{l}{\leq} u'$. Таким чином, для двох дискретних випадкових величин A, B виконується співвідношення $H(A) \overset{l}{<} H(B)$, якщо $M(A) < M(B)$ або при $M(A) = M(B)$ має місце нерівність $-D(A) < -D(B)$ (тобто $D(A) > D(B)$).

Теорема 3. Якщо виконуються умови

$$c_1 > \dots > c_k \geq 0, \quad (6)$$

та

$$H(G_1) \overset{l}{\leq} \dots \overset{l}{\leq} H(G_k), \quad (7)$$

то для розв'язку X^* задачі виконуються співвідношення

$$H(X_j^*) = H(G_j) \quad \forall j \in J_k. \quad (8)$$

Спочатку доведемо лему.

Лема 4. Нехай елементи мультимножини $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ є дійсними числами, що задовольняють (3), для коефіцієнтів цільової функції $L(x) = \sum_{j=1}^k c_j x_j$ виконується співвідношення (6), точка x^* визначається згідно з (4). Тоді для будь-якої точки $x \in E_k(G)$, відмінної від x^* , має місце співвідношення $L(x^*) < L(x)$.

Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що лема не має місця. Тоді для деякої вершини x переставного многогранника, суміжної з вершиною x^* , повинна виконуватися нерівність $L(x^*) \geq L(x)$. Але, як випливає з теореми 3.1 [7, с.79], точка x^* є мінімаллю функції $L(x)$ на множині $E_k(G)$, тому $L(x^*) \leq L(x)$. Звідси маємо, що $L(x) = L(x^*)$, тобто

$$\sum_{j=1}^k c_j (x_j - x_j^*) = 0. \quad (9)$$

Згідно з критерієм суміжності вершин переставного многогранника [7] вершина x суміжна з x^* , якщо вона одержана з вершини x^* переставленням компонент рівних $e_i, e_{i+1} \in S(G)$ ($i \in J_{n-1}$, $n = |S(G)|$), де елементи основи $S(G)$ мультимножини G упорядковані за зростанням. Запишемо рівність (9) так:

$$0 = \sum_{j=1}^k c_j (x_j - x_j^*) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s, j \neq q}}^k c_j (x_j - x_j^*) + c_s (e_i - e_{i+1}) + c_q (e_{i+1} - e_i),$$

де s та q відповідають різним компонентам у вершинах x^* та x . Оскільки $x_j = x_j^*$ для всіх $j \neq s$, $j \neq q$, то останнє співвідношення набуває вигляду

$c_s(e_i - e_{i+1}) + c_q(e_{i+1} - e_i) = 0$, звідки $(e_{i+1} - e_i)(c_s - c_q) = 0$, що неможливо, оскільки всі елементи основи мультимножини і всі коефіцієнти цільової функції є різними числами. Отримана суперечність і доводить лему.

Повернемося тепер до доведення теореми. Припустимо, що розв'язком задачі (5) є точка $\tilde{X}$, яка не задовольняє (8), у той же час точка X^* задовольняє (8). Тоді $C(\tilde{X}) \preceq C(X^*)$. Для точки $X = (X_1, \dots, X_k) \in E_k(\Gamma)$ позначимо $\mu(X) = (M(X_1), \dots, M(X_k))$. Нехай також $\Gamma^M = \{M(G_1), \dots, M(G_k)\}$. Оскільки для елементів мультимножини Γ виконується умова (7), то має місце співвідношення $M(G_1) \leq \dots \leq M(G_k)$. Тоді згідно з лемою 4 точка $\mu(X^*)$ є розв'язком задачі пошуку пари $\langle L(\mu(X^*)), \mu(X^*) \rangle$ такої, що

$$L(\mu(X^*)) = \min_{\mu(X) \in E_k(\Gamma^M)} \sum_{j=1}^k c_j M(X_j), \quad \mu(X^*) = \arg \min_{\mu(X) \in E_k(\Gamma^M)} \sum_{j=1}^k c_j M(X_j), \quad (10)$$

причому коли $\mu(X) \neq \mu(X^*)$, то $L(\mu(X^*)) < L(\mu(X)) = \sum_{j=1}^k c_j M(X_j)$. Оскільки

$$M(C(X)) = M\left(\sum_{j=1}^k c_j X_j\right) = \sum_{j=1}^k c_j M(X_j) = L(\mu(X)), \quad \text{то} \quad \text{тоді} \quad \text{також}$$

$M(C(X^*)) = M(C(X))$ і за пунктом 1 означення 1 маємо $C(X^*) \prec C(X)$. Отже, $\mu(\tilde{X}) = \mu(X^*)$, тобто

$$M(\tilde{X}_i) = M(G_i) \quad \forall i \in J_k. \quad (11)$$

Якщо всі величини $M(G_i)$ ($i \in J_k$) різні, то також $\tilde{X} = X^*$, що суперечить припущенню. Нехай тепер деякі з величин $M(G_i)$ ($i \in J_k$) рівні між собою, тобто $\Gamma^M \neq S(\Gamma^M)$. Тоді з (11) маємо $M(C(\tilde{X})) = M(C(X^*))$ і з $C(\tilde{X}) \preceq C(X^*)$ випливає виконання нерівності $D(C(\tilde{X})) \geq D(C(X^*))$. Нехай $S(\Gamma^M) = \{\bar{M}_1, \dots, \bar{M}_s\}$, причому елементи множини $S(\Gamma^M)$ упорядковані за зростанням. Нехай також індекси q_i ($i \in J_s$) такі, що $M(X_{q_{i-1}}) \neq M(X_{q_i})$; вважатимемо також, що $q_{s+1} = k+1$. Тоді з умови (11) випливає, що для всіх $i \in J_s$ виконуються співвідношення $M(X_{q_i}) = \dots = M(X_{q_{i+1}-1}) = \bar{M}_i$, а також $(X_{q_i}, \dots, X_{q_{i+1}-1}) \in E_{k_i}(\Gamma_i)$, де $k_i = |\Gamma_i|$,

$$\Gamma_i = \{G_{q_i}, \dots, G_{q_{i+1}-1}\} \quad i \in J_s. \quad (12)$$

Нехай $\tilde{C}_i(X) = \sum_{j=q_i}^{q_{i+1}-1} c_j^2 X_j$ ($i \in J_s$), $\delta_i(X) = (D(X_{q_i}), \dots, D(X_{q_{i+1}-1}))$. З (6) випливає,

що $c_1^2 > \dots > c_k^2 \geq 0$. Тоді згідно з лемою 4 маємо, що точка $\delta_i(X^*)$ є мінімальною функції

$\tilde{L}_i(\delta_i(X)) = -\sum_{j=q_i}^{q_{i+1}-1} c_j^2 D(X_j)$ на множині $E_{k_i}(\Gamma_i^D)$, де $\Gamma_i^D = \{D(G_{q_i}), \dots, D(G_{q_{i+1}-1})\}$ (з умов (7) і (11) випливає, що елементи цієї мультимножини упорядковані за незростанням), причому $L_i(\delta_i(X^*)) < L_i(\delta_i(\tilde{X}))$, якщо $\delta_i(\tilde{X}) \neq \delta_i(X^*)$. Оскільки елементи мультимножини є незалежними дискретними випадковими величинами, то на допустимій множині мають місце рівності:

$$-D(C(X)) = -D\left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=q_i}^{q_{i+1}-1} c_j X_j\right) = -\sum_{i=1}^s \sum_{j=q_i}^{q_{i+1}-1} c_j^2 D(X_j) = \sum_{i=1}^s L_i(\delta_i(X)).$$

Таким чином, якщо $\delta_i(\tilde{X}) \neq \delta_i(X^*)$ принаймні для одного $i \in J_s$, то $-D(C(X^*)) < -D(C(\tilde{X}))$. З іншого боку, для всіх $X \in E_k(\Gamma)$, які задовольняють умову (11) (а отже, і для $\tilde{X}$), справджується рівність $M(C(X)) = M(C(X^*))$, а тоді $C(X^*) \prec C(\tilde{X})$, що суперечить припущенню. Отже, для всіх $i \in J_s$ повинна виконуватися рівність $\delta_i(\tilde{X}) = \delta_i(X^*)$, тобто $D(\tilde{X}_j) = D(X_j^*)$ для всіх $j \in J_k$. Враховуючи (11), маємо $H(\tilde{X}_j) = H(X_j^*)$ для всіх $j \in J_k$, тобто точка $\tilde{X}$ задовольняє умову (8). Одержана суперечність і доводить теорему.

Наслідок 5. Якщо виконуються умови (6), (7) та

$$H(G_i) \neq H(G_j), \text{ якщо } G_i \neq G_j, i, j \in J_k, \quad (13)$$

то точка

$$X_j^* = G_j \quad \forall j \in J_k \quad (14)$$

є розв'язком задачі (5).

Слід зазначити, що коли для елементів мультимножини має місце співвідношення (7), але умова (13) не виконується, то твердження, аналогічне наслідку 5, місця немає.

Приклад 1. Розглянемо задачу пошуку пари (5), де $C(X) = 5X_1 + 4X_2$, $\Gamma = \{G_1, G_2\}$, причому дискретні випадкові величини G_1, G_2 задані рядами розподілу згідно з табл. 1

Таблиця 1

Ряди розподілу дискретних випадкових величин для прикладу 1

величини	G_1				G_2			
їх значення	2	6	8	12	2	7	12	16
відповідні ймовірності	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{23}{45}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{72}$

Для величин G_1 і G_2 згідно з пунктом 3.1 означення 1 має місце співвідношення $G_1 \prec G_2$, оскільки $M(G_1) = M(G_2) = 7$, $D(G_1) = D(G_2) = 13$, при цьому $g_1^1 = g_2^1 = 2$, $P(G_1 = 2) = P(G_2 = 2) = \frac{1}{4}$, $g_1^2 = 6 < g_2^2 = 7$. Проте мінімаллю є точка (G_2, G_1) . Дійсно, для випадкових величин $F_1 = 5G_1 + 4G_2$, $F_2 = 5G_2 + 4G_1$ справедливі співвідношення: $M(F_1) = M(F_2) = 63$, $D(F_1) = D(F_2) = 533$, але при цьому $f_1^1 = 5g_1^1 + 4g_2^1 = 18 = f_2^1 = 5g_2^1 + 4g_1^1$, $P(F_1 = 18) = P(F_2 = 18) = \frac{1}{16}$, $f_2^2 = 34$, $f_1^2 = 38$, звідки за пунктом 3.1 означення 1 маємо, що $F_2 \prec F_1$.

Розглянемо детальніше розв'язування задачі (5), якщо елементи мультимножини Γ задовольняють умову (7), але не задовольняють (13). Розіб'ємо мультимножину Γ на підмультимножини вигляду (12), де індекси q_i ($i \in J_r$) такі, що $H(G_{q_i-1}) \neq H(G_{q_i})$, $q_{r+1} = k+1$. Якщо у мультимножині Γ_i усі елементи однакові, то з умови (8) випливає, що для оптимального розв'язку X^* задачі (5) мають місце рівності $X_{q_i}^* = \dots = X_{q_{i+1}-1}^* = G_{q_i}$. Якщо серед величин $G_{q_i}, \dots, G_{q_{i+1}-1}$ є різні, то $(X_{q_i}^*, \dots, X_{q_{i+1}-1}^*)$ є переставленням елементів мультимножини Γ_i .

Нехай точка $\tilde{X}$ така, що для всіх $i \in J_r$ $(\tilde{X}_{q_i}, \dots, \tilde{X}_{q_{i+1}-1})$ надає мінімум функції $C_i(X) = \sum_{j=q_i}^{q_{i+1}-1} c_j X_j$ на множині $E_{k_i}(\Gamma_i)$ (як і вище, $k_i = |\Gamma_i|$), тобто $C_i(\tilde{X}) \leq C_i(X)$, де $(X_{q_i}, \dots, X_{q_{i+1}-1}) \in E_{k_i}(\Gamma_i)$ (якщо $|S(\Gamma_i)| = 1$, то така точка у множині $E_{k_i}(\Gamma_i)$ єдина). Тоді згідно з наслідком 5 одержуємо, що $C(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^r C_i(\tilde{X}) \leq \sum_{i=1}^r C_i(X) = C(X)$ яка б не була точка $X \in E_k(\Gamma)$. Таким чином, точка $\tilde{X}$ є розв'язком задачі (5).

Приклад 2. Розглянемо задачу директора для випадку, коли час очікування відвідувачів задається мультимножиною $\Gamma = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}$, де ряди розподілу випадкових величин G_1, G_2 наведено в табл. 1, а ряди розподілу випадкових величин G_3, G_4, G_5 – у табл. 2.

Таблиця 2

Ряди розподілу дискретних випадкових величин для прикладу 2

величини	G_3			G_4				G_5		
їх значення	1	7	9	2	4	8	11	4	8	10
відповідні ймовірності	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Цільова функція у цьому випадку має вигляд:

$$C(X) = 5X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 2X_4 + X_5.$$

Сформуємо вектори $H(G_j) = (M(G_j); -D(G_j))$ для величин G_j ($j \in J_5$):

$$H(G_1) = H(G_2) = (7; -13), H(G_3) = H(G_4) = (7; -10), H(G_5) = (8; -6).$$

Отже, для елементів мультимножини Γ виконується умова (7). При цьому розбиття мультимножини Γ на підмультимножини вигляду (12) відбувається так:

$$\Gamma_1 = \{G_1, G_2\}, \Gamma_2 = \{G_3, G_3, G_4\}, \Gamma_3 = \{G_5\}.$$

Таким чином, в оптимальному розв'язку $(X_1, X_2) \in E_2(\Gamma_1)$, $(X_3, X_4, X_5) \in E_3(\Gamma_2)$, $X_6 = G_5$. Як показано у прикладі 1, мінімум функції $C_1(X) = 5X_1 + 4X_2$ на множині $E_2(\Gamma_1)$ досягається у точці (G_2, G_1) . Множина $E_3(\Gamma_2)$ містить 3 переставлення: $E_3(\Gamma_2) = \{(G_3, G_4, G_4), (G_4, G_3, G_4), (G_4, G_4, G_3)\}$, відповідні значення функції $C_2(X) = 3X_3 + 2X_2 + X_1$ дорівнюють $F_1 = 3G_3 + 2G_4 + G_4$, $F_2 = 3G_4 + 2G_3 + G_4$, $F_3 = 3G_4 + 2G_4 + G_3$. Оскільки $f_1^1 = 9 < f_2^1 = 10 < f_3^1 = 11$, то найменше значення функції $C_2(X)$ досягається на переставленні (G_3, G_4, G_4) . Таким чином, розв'язком задачі є переставлення $X^* = (G_2, G_1, G_3, G_4, G_4, G_5)$.

Висновки і перспективи

У роботі побудовано математичну модель задачі про оптимальну перестановку відвідувачів на прийомі, якщо очікуваний час прийому задається дискретними випадковими величинами. Поняття мінімуму вводиться на основі відношення порядку на множині дискретних випадкових величин.

Запропоновано підхід до розв'язування лінійних безумовних задач на переставленнях зі стохастичними параметрами для випадку, коли коефіцієнти цільової функції упорядковані за спаданням. Актуальною залишається розробка методів вибору оптимальних переставлень серед випадкових величин з рівними математичними сподіваннями та дисперсіями, наприклад, застосування методу гілок і меж.

Література

1. Ермольев Ю.М. Стохастические модели и методы в экономическом планировании / Ю. М. Ермольев, А. И. Ястремский. – М. : Наука, 1979. – 256 с.
2. Сергиенко И.В. Применение методов стохастической оптимизации для исследования трансформационных процессов в экономике / И. В. Сергиенко, М.В. Михалевич // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2004. — № 4. — С. 7–29
3. Кан Ю.С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями / Ю.С. Кан, А.И.Кибзун. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 375 с
4. Емец О.А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности / О. А. Емец, А. А. Роскладка // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 5. – С.35-44.
5. Сергиенко И.В. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ / И. В. Сергиенко, О. А. Емец, А. О. Емец // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – №5. – С. 38-50.
6. Емец О.О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах : монографія / О. О. Емец, Ол-ра О. Емец. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/352>.
7. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г.Стоян, О.О.Ємец. – К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487>.
8. Шкурба В.В. Задача трех станков / В. В. Шкурба. – М. : Наука, 1976. – 96с.

9. Емец О.А. Об оптимизационных задачах с вероятностной неопределенностью / О. А. Емец, Т. Н. Барболина // Доповіді НАН України. – 2014. – № 11. – С. 40 - 45.

Стаття надійшла 12._02_.2014
Прийнято до друку 04._03_.2014

Аннотация

О.А. Емец, Т.Н. Барболина

Построение и исследование математической модели задачи директора со стохастическими параметрами

В работе построена математическая модель задачи директора со стохастическими параметрами как линейная безусловная задача стохастической оптимизации на перестановках. Формирование критерия оптимальности осуществлено на основе введения линейного порядка на множестве дискретных случайных величин. Исследованы свойства решения линейной безусловной задачи оптимизации на перестановках в случае, когда все коэффициенты целевой функции неотрицательны и различны. На основе полученных результатов предложен подход к решению сформулированной в статье задачи с вероятностной неопределенностью.

Ключевые слова: дискретная случайная величина, задача директора, комбинаторная оптимизация, линейный порядок, стохастическая оптимизация.

Summary

O.O. Iemets, T.M. Barbolina

Construction and research of mathematical model of director's task with stochastic parameters

In this work we construct the mathematical model of director's task as linear unconditional problem of stochastic optimization on permutations. The optimality criterion is based on the linear order on set of discrete random variables. Also we research properties of solution of linear unconditional optimization problem on permutations when coefficients of goal function are different non-negative numbers. Based on such results we propose an approach for solution of problem with probability uncertainty which was formulated in the article.

Key words: discrete random variable, director's task, combinatorial optimization, linear order, stochastic optimization.

УДК 519.8

О.О. Ємець, М.В. Леонова

СИМЕТРИЯ ПЕРЕСТАВНИХ МНОГОГРАННИКІВ ТА ЇХ КОМБІНАТОРНИЙ ТИП

В роботі досліджується множина перестановок з елементів заданої мультимножини, тобто множина перестановок з повтореннями. Досліджено властивості її опуклої оболонки – многогранника перестановок. При цьому використовується така властивість, що множина перестановок збігається з множиною вершин переставного многогранника. Виклад ведеться з використанням термінології мультимножин (основа, кратність елементів, первинна специфікація). В роботі досліджується центральна симетрія переставних многогранників, зокрема розглянута центральна симетрія вершин, ребер та і-граней многогранника. Встановлено критерій центральної симетрії вершин многогранника перестановок у випадку сталості різниці двох сусідніх елементів основи мультимножини та рівності рівновіддалених елементів від кінців кортежа, який є основою цієї мультимножини.

Доведена центральна симетрія переставних многогранників, у яких мультимножини, що визначають перестановки, мають спільну основу з властивістю сталості різниці двох сусідніх елементів основи та їх первинні специфікації є кортежами, один з яких утворюється з іншого зміною порядку слідування елементів на протилежний. Показано, що многогранники, які є опуклими оболонками множин перестановок описаних вище, є центральні симетричними. Доведена центральна симетричність переставного многогранника, коли переставляються різні елементи, що утворюють арифметичну прогресію.

На основі поняття граничного комплексу многогранника та його центральної симетрії, обґрунтовано, що однаковий комбінаторний тип мають переставні многогранники із спільною основою та первинними специфікаціями, що є симетричними відносно порядку елементів.

Ключові слова: *центральна симетрія, переставний многогранник, комбінаторний тип, множина перестановок.*

Постановка задачі

В наш час актуальною є проблема вивчення ефективності оптимізаційних моделей, в тому числі комбінаторних. При цьому доцільним вбачається дослідження структури та властивостей їх допустимих областей, зокрема загального переставного многогранника [1-6]. Оскільки структура переставних многогранників зв'язана з їх комбінаторним типом, то визначення комбінаторного типу є важливим у дослідженні комбінаторних многогранників. Питання центральної симетрії переставних многогранників у науковій літературі є недослідженим. В [2, 5] розглядається центральна симетрія комбінаторних множин відносно деякої точки, а також як наслідок симетрія деяких переставних многогранників.

Мета статті

Метою статті є дослідження умов центральної симетрії для переставних многогранників для використання цих результатів при комбінаторній типізації переставних многогранників.

Виклад основного матеріалу

Нехай задано мультимножину $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ з основою $S(G) = (e_1, e_2, \dots, e_\nu)$ і кратностями елементів $k_G(e_i) = \eta_i$. Кортеж кратностей в порядку елементів основи називають первинною специфікацією мультимножини G позначають $[G] = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu)$. Нехай $J_k = \{1, 2, \dots, k\}$; $J_k^0 = J_k \cup \{0\}$; $J_0 = \emptyset$.

Як відомо [1], множина перестановок елементів мультимножини G збігається з множиною вершин переставного многогранника. Опукла оболонка загальної множини перестановок $E_{k\nu}(G)$ є переставним многогранником $\Pi_{k\nu}(G)$, система умов якого має [1, 3] вигляд:

$$\sum_{i \in \omega} x_i \geq \sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \quad \forall \omega \subset J_k, |\omega| < k; \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k g_i, \quad (1)$$

за умови, що $g_i \leq g_{i+1} \quad \forall i \in J_{k-1}$.

Як відомо [1, 2, 5], точки множини перестановок $E_k(J_k)$ лежать на $(k-1)$ -сфері з центром в точці з координатами,

$$\tau = 0,5(k+1), \quad (2)$$

і радіусом $r = \frac{1}{6}\sqrt{3k(k+1)(k-1)}$, а $E_{k\nu}(G)$ - на $(k-1)$ -сфері з центром в точці

$$\tau = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k g_i \quad \text{та радіусом } r = \sqrt{\sum_{i=1}^k (g_i - \tau)^2}.$$

В [2, 5] доведено теорему про те, що множина $E_k(J_k)$ центральносиметрична з центром симетрії в точці τ^* з координатами (2). Наслідком [5] є те, що $(k-1)$ -многогранник Π_k , який є опуклою оболонкою множини J_k , центральносиметричний з центром симетрії в точці τ^* .

Два многогранника [3] M і M' називаються комбінаторно еквівалентними, якщо ізоморфні їх граничні комплекси $K_\Gamma(M)$ і $K_\Gamma(M')$. Іншими словами, многогранники комбінаторно еквівалентні, якщо між їх граничними комплексами існує взаємно однозначне відображення φ , що зберігає порядок включення. Про два комбінаторно еквівалентні многогранники кажуть, що вони є многогранниками одного типу.

Означення 1. Точка $x \in R^k$ називається центрально симетричною відносно деякої точки $\tau^* \in R^k$ для точки $y \in R^k$, якщо x, y, τ^* - лежать на одному відрізку з кінцями x, y , де τ^* - його середина.

Теорема 1. Якщо в мультимножині $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ з основою $S(G) = (e_1, e_2, \dots, e_\nu)$, де $e_{i+1} = e_i + \Delta$ ($\forall i \in J_\nu$), $\Delta > 0$; з первинною специфікацією $[G] = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu)$ є така симетрія первинної специфікації: $\eta_i = \eta_{\nu-i+1}$ ($\forall i \in J_\nu$), то дві вершини $x^1 = (x_1^1, \dots, x_k^1) \in E_{k\nu}(G)$ та $x^2 = (x_1^2, \dots, x_k^2) \in E_{k\nu}(G)$ многогранника

$\Pi_{kv}(G) = \text{conv}E_{kv}(G)$ є центрально симетричними відносно $\tau^* = (\tau, \tau, \dots, \tau)$, де $\tau = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k g_i$, тоді і тільки тоді, коли $x_i^1 = e_{p_i}$, $x_i^2 = e_{q_i}$, а $p_i + q_i = \nu + 1 \forall i \in J_k$; $p_i, q_i \in J_\nu$.

Доведення. Якщо дві точки x^1, x^2 многогранника $\Pi_{kv}(G)$ центрально симетричні відносно точки τ^* , то їх координати з умови поділу відрізка навпіл визначаються так: $x_i^1 + x_i^2 = 2\tau$, $\forall i \in J_k$. $\sum_{i=1}^k x_i^1 = \sum_{i=1}^k x_i^2 = \sum_{i=1}^k g_i = k\tau$. Оскільки $\tau = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k g_i$, то

$$k(x_i^1 + x_i^2) = 2 \sum_{i=1}^k g_i. \quad (3)$$

Деяка координата вершини переставного многогранника за умови твердження визначається як член e_i (i – номер елемента основи) арифметичної прогресії з першим членом e_1 та різницею Δ : $e_i = e_1 + (i-1)\Delta$, а вираз $\sum_{i=1}^k g_i$ – як сума зважених кратністю η_i цих членів, тобто $\sum_{i=1}^k g_i = \sum_{i=1}^\nu e_i \eta_i$. Нехай маємо два випадки: коли $\nu = 2l$ і $\nu = 2l+1$. Тоді у першому випадку

$$\sum_{i=1}^k g_i = \sum_{i=1}^\nu e_i \eta_i = \sum_{i=1}^l e_i \eta_i + \sum_{i=1}^l e_{\nu-i+1} \eta_i = k \left(e_1 + \frac{\Delta(\nu-1)}{2} \right).$$

Тут враховано, що $e_{\nu-i+1} = e_1 + \Delta(\nu-i)$, а $2 \sum_{i=1}^l \eta_i = k$.

У другому випадку маємо:

$$\sum_{i=1}^k g_i = \sum_{i=1}^l e_i \eta_i + \sum_{i=1}^l e_{\nu-i+1} \eta_i + e_{l+1} \eta_{l+1} = (2e_1 + \Delta(\nu-1)) \frac{k}{2} + \eta_{l+1} \Delta \left(l - \frac{\nu-1}{2} \right) = k \left(e_1 + \frac{\Delta(\nu-1)}{2} \right),$$

оскільки доданок $\eta_{l+1} \Delta \left(l - \frac{\nu-1}{2} \right) = 0$ в силу того, що $\nu = 2l+1$. Отже, у випадках, коли

$$\nu = 2l \text{ і } \nu = 2l+1, \text{ маємо } \sum_{i=1}^k g_i = k \left(e_1 + \frac{\Delta(\nu-1)}{2} \right).$$

Підставимо в (3) координати центральносиметричних точок x^1, x^2 . Нехай $x_i^1 = e_{p_i}$, $x_i^2 = e_{q_i}$, $p_i, q_i \in J_\nu \forall i \in J_k$. (Далі індекси i у p_i, q_i опускаємо, якщо це не приводить до плутанини).

$$x_i^1 + x_i^2 = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k g_i, \quad e_1 + \Delta(p-1) + e_1 + \Delta(q-1) = \frac{2}{k} k \left(e_1 + \frac{\Delta(\nu-1)}{2} \right),$$

$$2e_1 + \Delta(p+q-2) = 2e_1 + \Delta(\nu-1),$$

$$2e_1 + \Delta(p+q-2) = 2e_1 + \Delta(\nu-1), \quad p+q = \nu+1.$$

Оскільки $p = p_i$, $q = q_i$, то маємо $p_i + q_i = \nu+1$, $p_i, q_i \in J_\nu$, $i \in J_k$.

Тобто номери p_i, q_i елементів основи, яким дорівнюють i -ті елементи центральносиметричних перестановок x^1, x^2 , задовольняють умові: $p_i + q_i = \nu+1$.

Викладення в зворотному порядку дає підтвердження другої частини теореми. Що і треба було довести.

Зауваження 1. Отже, кожна вершина переставного многогранника $\Pi_{kv}(G)$ з G , що задовольняє теоремі 1, має центрально симетричну вершину в $\Pi_{kv}(G)$.

Зауваження 2. Якщо у M існує центр симетрії вершин, то многогранник завжди можна перенести паралельним перенесенням так, що центр симетрії переміститься в точку $\tau^* = (\tau, \tau, \dots, \tau)$, тобто ця умова не є суттєвою.

Означення 2. i -грань Γ_i^1 многогранника $M_1 \subset R^k$ називається центрально симетричною грані Γ_i^2 многогранника $M_2 \subset R^k$ відносно точки $\tau^* = (\tau, \tau, \dots, \tau)$, якщо для $\forall z \in \Gamma_i^1 \exists w \in \Gamma_i^2$ такі, що зта w – центрально симетричні точки.

Означення 3. Множина $M_1 \subset R^k$ називається центрально симетричною відносно точки $\tau^* = (\tau, \dots, \tau) \in R^k$ до множини $M_2 \subset R^k$, якщо для всякої точки $x \in M_1$ існує центрально симетрична відносно τ^* точка $y \in M_2$ і навпаки: $\forall y \in M_2 \exists x \in M_1$ така, що x та y – центрально симетричні точки відносно точки τ^* . Такі множини називаються центрально симетричними відносно точки τ^* .

Позначимо $vert M$ – множину вершин многогранника M .

Твердження 2. Якщо для кожної вершини $x^i, i \in J_r$, многогранника $M_1 \subset R^k$ $x^i \in vert M_1$ існує вершина $y^i \in vert M_2$ многогранника $M_2 \subset R^k$ центрально симетрична відносно точки $\tau^* = (\tau, \tau, \dots, \tau)$, то для будь-якої точки $x \in M_1$ існує $y \in M_2$, яка є центрально симетричною відносно τ^* .

Доведення. Згідно умови теореми, для кожної вершини $x^i = (x_1^i, \dots, x_k^i) \in vert M_1$ існує вершина $y^i = (y_1^i, \dots, y_k^i) \in vert M_2$ така, що

$$x_j^i + y_j^i = 2\tau, i \in J_r \quad \forall j \in J_k \quad (4)$$

Скористаємося теоремою (див., наприклад, [3]) про те, що $\forall x \in M_1$ існує опукла лінійна комбінація вершин, що є точкою $x: x = \sum_{i=1}^r \lambda_i x^i, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \forall i \in J_r$. Тобто існує таке представлення координат x_j точки x :

$$x_j = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_j^i. \quad (5)$$

Помножимо ліву і праву частину рівності (4) на λ_i :

$$\lambda_i (x_j^i + y_j^i) = \lambda_i 2\tau, i \in J_r, \forall j \in J_k \text{ та візьмемо суму цих рівнянь по } i \text{ від } 1 \text{ до } r.$$

Взявши до уваги вираз (5) та те, що $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$, маємо $x_j + \sum_{i=1}^r \lambda_i y_j^i = 2\tau \quad \forall j \in J_k$.

Розглянемо $y^* = (y_1, \dots, y_k)$, де $y_j = \sum_{i=1}^r \lambda_i y_j^i$. Оскільки $y^* = (y_1, \dots, y_k) \in M_2$, то для точки $x \in M_1$ існує точка $y \in M_2$ така, що $x_j + y_j = 2\tau$, тобто $x + y = 2\tau^*$. Що і треба було довести.

Твердження 3. Якщо для кожної вершини $x^i \in \text{vert}M_1 = \{x^1, \dots, x^r\}$ многогранника $M_1 \subset R^k$ існує вершина $y^i \in \text{vert}M_2$ многогранника $M_2 \subset R^k$ центрально симетрична відносно точки $\tau^* = (\tau, \tau, \dots, \tau)$, то будь-яка i -грань Γ_i^1 многогранника M_1 має центрально симетричну відносно τ^* i -грань Γ_i^2 в M_2 , $i \in J_{k-1}$, де $k = \dim M_j$, $j = 1, 2$, причому якщо $x \in \Gamma_i^1$ $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i x^i$, то $y \in \Gamma_i^2$ та $y = \sum_{i=1}^r \lambda_i y^i$, де x^i, y^i – центрально симетричні відносно τ^* вершини.

Доведення. Спершу розглянемо випадок, коли i -грань є ребром, тобто 1-гранню. Тоді будь-яка координата x_i точки x , що лежить на одному з ребер Γ_1^1 може бути представлена у вигляді:

$$x_i = \lambda x_i^1 + (1 - \lambda) x_i^2, \text{ де } x \in [x^1; x^2] = \Gamma_1^1, 0 \leq \lambda \leq 1, i \in J_k, x^j = (x_1^j, \dots, x_k^j), j = 1, 2.$$

Співвідношення для координат симетричних відносно $\tau^* = (\tau, \tau, \dots, \tau)$ точок x, y , що належать двом довільним ребрам $\Gamma_1^1 \subset M_1, \Gamma_1^2 \subset M_2$ відповідно, має вигляд:

$$x_i + y_i = 2\tau, \quad (6)$$

де $y \in [y^1; y^2] = \Gamma_1^2, y^j = (y_1^j, \dots, y_k^j), j = 1, 2, i \in J_k$. Тобто $y_i = 2\tau - x_i$. Нехай $y_i = \alpha y_i^1 + (1 - \alpha) y_i^2$, $0 \leq \alpha \leq 1$, тоді $\lambda x_i^1 + (1 - \lambda) x_i^2 + \alpha y_i^1 + (1 - \alpha) y_i^2 = 2\tau$.

Врахувавши (6), маємо $(\lambda - \alpha)(x_i^1 - x_i^2) = 0$.

Оскільки $x_i^1 \neq x_i^2$, то для того, щоб виконувалося останнє співвідношення необхідно і достатньо, щоб $\alpha = \lambda$. Отже, для будь-якої точки x , що належить ребру $\Gamma_1^1 \subset M_1$, існує центрально симетрична їй відносно τ^* точка y , що належить ребру $\Gamma_1^2 \subset M_2$. Тобто за умов теореми будь-яке ребро многогранника M_1 має центрально симетричне відносно τ^* ребро в M_2 . Причому якщо $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2$, то $y = \lambda y^1 + (1 - \lambda) y^2$, де y^1 – точка центрально симетрична відносно τ^* до точки x^1 , а точка y^2 центрально симетрична відносно τ^* точці x^2 .

Аналогічно доводиться існування симетричних j -граней многогранників M_1 та M_2 $j \in J_{k-1}$. Нехай j -грань Γ_j^1 має s вершин $z^1, \dots, z^s$. Якщо $z \in \Gamma_j^1 \subset M_1$, то $z = \sum_{i=1}^s \lambda_i z^i$, $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0, \forall i \in J_s, \{z^1, \dots, z^s\} \subset \{x^1, \dots, x^r\} = \text{vert}M_1$. Утворимо множину точок центральносиметричних до точок $z^i, i \in J_s: \{w^1, \dots, w^s\} \subset \{y^1, \dots, y^r\} = \text{vert}M_2$, тобто множини точок z^i є множинами вершин, для кожної з яких за умов теореми існує центрально симетрична точка w^i . Тобто згідно умови теореми:

$$z^i + w^i = 2\tau^*, i \in J_s \quad (7)$$

$$z_j = \sum_{i=1}^s \lambda_i z_j^i. \quad (8)$$

Помножимо ліву і праву частину рівності (7) в координатній формі на λ_i :

$$\lambda_i(z_j^i + w_j^i) = \lambda_i 2\tau, i \in J_s$$

та візьмемо суму від обох частин рівняння по i від 1 до s .

Взявши до уваги вираз (8) та те, що $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$, маємо $z_j + \sum_{i=1}^s \lambda_i w_j^i = 2\tau$.

Оскільки $w_j = \sum_{i=1}^s \lambda_i w_j^i$, то $z_j + w_j = 2\tau$. Що і треба було довести.

Наслідок. Теорема 2, 3 справедливі при $M_1 = M_2 = M$.

Лема 4. Точка $x = (e_1, \dots, e_1, e_1 + \Delta, \dots, e_1 + \Delta, \dots, e_1 + (t-1)\Delta, \dots, e_1 + (t-1)\Delta, \dots, e_1 + (\nu-1)\Delta, \dots, e_1 + (\nu-1)\Delta) \in R^k$, у якій координата e_1 повторюється η_1 раз, ..., координата $e_1 + (t-1)\Delta$ повторюється η_t раз, ..., координата $e_1 + (\nu-1)\Delta$ повторюється η_ν раз, та точка $y = (e_1 + (\nu-1)\Delta, e_1 + (\nu-1)\Delta, \dots, e_1 + (\nu-t)\Delta, \dots, e_1 + (\nu-t)\Delta, \dots, e_1 + \Delta, \dots, e_1 + \Delta, e_1, \dots, e_1)$, у якій координата $e_1 + (\nu-1)\Delta$ повторюється η_1 раз, $e_1 + (\nu-t)\Delta$ η_t раз, $e_1 + \Delta$ повторюється $\eta_{\nu-1}$ раз, координата e_1 повторюється η_ν раз, $t \in J_\nu$, $\eta_1 + \dots + \eta_t + \dots + \eta_\nu = k$, є центрально симетричними відносно точки $\tau^* = (\tau, \dots, \tau) \in R^k$, де $\tau = e_1 + (\nu-1)\frac{\Delta}{2}$.

Доведення. Здійснюється безпосередньою перевіркою того, що $x + y = 2\tau$. Для будь-якого t , $1 \leq t \leq \nu$, координати x_i та y_i , що приймають значення відповідно $x_i = e_1 + (t-1)\Delta$ та $y_i = e_1 + (\nu-1)\Delta$ у сумі дають: $x_i + y_i = 2e_1 + (\nu-t)\Delta = 2\tau$.

Що і треба було довести.

Лема 5. Якщо точки $x' = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, $y' = (y_{i_1}, \dots, y_{i_k})$, утворені як перестановки координат відповідно точок x та y з леми 4, то такі точки x' та y' являються центрально симетричними відносно точки $\tau^* = (\tau, \dots, \tau)$, де $\tau = e_1 + (\nu-1)\frac{\Delta}{2}$.

Доведення. Після перестановки координати x_i, y_i точок x та y з леми 4 стають на деяке місце i_j , $1 \leq i_j \leq k$, але на одне й те саме. Отже їх сума не змінюється, тобто $x_{i_j} + y_{i_j} = 2\tau$, що і треба було довести.

Теорема 6. Множини перестановок $E_{k\nu}(G_1)$ та $E_{k\nu}(G_2)$, що утворені з мультимножин $G_1 = \{g_1, \dots, g_k\}$, $G_2 = \{g'_1, \dots, g'_k\}$ відповідно зі спільною основою $S(G_1) = S(G_2) = (e_1, \dots, e_\nu)$, де $e_{i+1} = e_i + \Delta$, $\Delta > 0$, $i \in J_{\nu-1}$; та первинними специфікаціями $[G_1] = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu)$, $[G_2] = (\eta_\nu, \eta_{\nu-1}, \dots, \eta_1)$, є центрально симетричними відносно точки $\tau^* = (\tau, \dots, \tau)$, де $\tau = e_1 + (\nu-1)\frac{\Delta}{2}$.

Доведення. Точки-перестановки g' з $E_{k\nu}(G_1)$ – це перестановки, що утворюються з точки x з леми 4: $g' = (g_1, \dots, g_k) = x = (e_1, \dots, e_1, e_1 + (t-1)\Delta, \dots, e_1 + (t-1)\Delta, \dots, e_1 + (\nu-1)\Delta, \dots, e_1 + (\nu-1)\Delta)$. А точки $g'' \in E_{k\nu}(G_2)$ – це перестановки, що

утворюються з точки y з леми 4: $g'' = (g'_1, \dots, g'_k) = y = (e_1 + (\nu - 1)\Delta, \dots, e_1 + (\nu - 1)\Delta, \dots, e_1 + (\nu - t)\Delta, \dots, e_1 + (\nu - t)\Delta, \dots, e_1, \dots, e_1)$.

Згідно леми 5 $\forall g' \in E_{k\nu}(G_1) \exists g'' \in E_{k\nu}(G_2)$, яка їй центрально симетрична відносно $\tau^* = (\tau, \dots, \tau)$, де $\tau = e_1 + (\nu - 1)\frac{\Delta}{2}$, і навпаки. Що і доводить теорему.

Наслідок (теорема 4.3 з [5]). При $\Delta = 1$; $\nu = k$ маємо $E_k(J_k)$ – центрально симетрична множина відносно точки τ^* сама до себе.

Теорема 7. Два переставні многогранники $\Pi_{k\nu}(G_1), \Pi_{k\nu}(G_2)$, що визначаються мультимножинами $G_1 = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ і $G_2 = \{g'_1, g'_2, \dots, g'_k\}$ відповідно, зі спільною основою $S = (e_1, e_2, \dots, e_\nu)$, $e_{i+1} = e_i + \Delta$, де $\Delta > 0$, $i = 1, 2, \dots, \nu - 1$ та первинними специфікаціями $[G_1] = (\eta_1^1, \dots, \eta_\nu^1) = (\eta_1, \dots, \eta_\nu)$, $[G_2] = (\eta_1^2, \dots, \eta_\nu^2) = (\eta_\nu, \dots, \eta_1)$, $(\eta_i^1 = \eta_{\nu-i+1}^2)$ $\forall i \in J_\nu$ є центрально симетричними відносно $\tau^* = (\tau, \dots, \tau)$, де $\tau = e_1 + (\nu - 1)\frac{\Delta}{2}$.

Доведення. Як відомо [1], множина вершин переставного многогранника збігається з множиною перестановок, що його (многогранник) утворює. Тобто, маємо: $E_{k\nu}(G_1) = \text{vert}\Pi_{k\nu}(G_1)$; $E_{k\nu}(G_2) = \text{vert}\Pi_{k\nu}(G_2)$, де $\Pi_{k\nu}(G_j) = \text{conv}E_{k\nu}(G_j)$, $j = 1, 2$.

За теоремою 6 множини $E_{k\nu}(G_1)$ та $E_{k\nu}(G_2)$ центрально симетричні. Скористаємося теоремою 2, з якої і випливає центральна симетрія многогранників $\Pi_{k\nu}(G_1), \Pi_{k\nu}(G_2)$. Що і треба було довести.

Теорема 8. Якщо $M_1 \subset R^k$ та $M_2 \subset R^k$ – множини центрально симетричні відносно точки $\tau_k^* = (\tau_1, \dots, \tau_k) \in R^k$, $\tau_i = \tau = \text{const}, \forall i \in J_k$, то проєкції $\Pi(M_1)_j \subset R^{k-1}$ та $\Pi(M_2)_j \subset R^{k-1}$ множин M_1 та M_2 відповідно на площини $x_j = c_1 = \text{const}$ та $x_j = c_2 = \text{const}$ є центрально симетричними відносно точки $\tau_{k-1}^* = (\tau, \dots, \tau) \in R^{k-1}$.

Доведення. Після проєктування M_1 та M_2 на площини $x_j = c_1$ та $x_j = c_2$ відповідно точки $x = (x_1, \dots, x_k) \in M_1$ та $y = (y_1, \dots, y_k) \in M_2$, що мають властивість $x + y = 2\tau_k^*$, або в координатах:

$$x_i + y_i = 2\tau \quad \forall i \in J_k \quad (9)$$

перетворюються в точки $\bar{x} = \Pi(x)_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1})$ та $\bar{y} = \Pi(y)_j = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_k) = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{k-1})$. В силу (9) для координат точок $\bar{x} \in \Pi(M_1)_j$ та $\bar{y} \in \Pi(M_2)_j$ маємо

$$\bar{x}_i + \bar{y}_i = 2\tau \quad \forall i \in J_{k-1}. \quad (10)$$

Властивість (10) означає $\bar{x} + \bar{y} = 2\tau_{k-1}^*$, що за означенням 1 свідчить, що точки $\bar{x}, \bar{y}$ – центрально симетричні. В силу довільності $x(y)$ маємо довільність $\bar{x}(\bar{y})$, що за означенням 3 свідчить про центральну симетричність розглянутих проєкцій M_1 та M_2 . Що і треба було довести.

Теорема 9. Якщо $\nu = k$, то $\Pi_{k\nu}(G_1) = \Pi_{k\nu}(G_2)$; де G_1, G_2 – задані умовами теореми 7, і цей многогранник є центрально симетричним сам до себе відносно τ^* .

Доведення. При $\nu = k$ маємо: $\eta_1 + \dots + \eta_k = k$, $\eta_i \geq 0$, тобто $\eta_i = 1 \forall i \in J_k$. Отже, многогранники рівні $\Pi_{k\nu}(G_1) = \Pi_{k\nu}(G_2)$, а з теореми 7 маємо їх центральну симетрію.

Наслідок [5]. За умов теореми 8 та при $\Delta = 1$ переставний многогранник $\Pi_k(J_k)$ – центрально симетричний відносно τ^* .

Твердження 10. У переставному многограннику $\Pi_{k\nu}(G)$ у випадку центральної симетрії його вершин кожна i -грань має центрально симетричну i -грань, що належить $\Pi_{k\nu}(G)$.

Доведення випливає з умови теореми 3, як її наслідок.

Теорема 11. Якщо многогранник $M_1 \subset R^k$, $M_2 \subset R^k$ – центрально симетричні, $K_\Gamma(M_1)$, $K_\Gamma(M_2)$ – граничні комплекси многогранників M_1 та M_2 відповідно, то ці граничні комплекси многогранників ізоморфні.

Доведення. Позначимо:

$$K_\Gamma(M_j) = \{\Gamma_{01}^j, \Gamma_{02}^j, \dots, \Gamma_{0n_0}^j, \Gamma_{11}^j, \Gamma_{12}^j, \dots, \Gamma_{1n_1}^j, \dots, \Gamma_{k-1,1}^j, \dots, \Gamma_{k-1,n_{k-1}}^j\} = \Gamma_0^j \cup \Gamma_1^j \cup \dots \cup \Gamma_{k-1}^j,$$

$j = 1, 2$, де Γ_i^j – множина i -граней Γ_{il}^j , $l = 1, 2, \dots, n_i$ многогранника M_j , n_i – кількість i -граней многогранників M_1 та M_2 (зауважимо, що згідно теореми 3 кількість i -граней M_1 та M_2 однакова).

Згідно означення ізоморфності комплексів треба довести, що центральна симетрія ϕ (яка, як випливає з теореми 3, – взаємно однозначне відображення: $\phi(\Gamma_{il}^1) = \Gamma_{il}^2 \forall l \in J_{n_i} \forall i \in J_{n_i}^0$) зберігає операцію включення: тобто

$$\forall \Gamma_{i_1 l_1}^j, \Gamma_{i_2 l_2}^j \in K_\Gamma(M_j) \quad j = 1, 2; \Gamma_{i_1 l_1}^1 \subset \Gamma_{i_2 l_2}^1 \Leftrightarrow \Gamma_{i_1 l_1}^2 \subset \Gamma_{i_2 l_2}^2.$$

1) Нехай $\Gamma_{i_1 l_1}^1 \subset \Gamma_{i_2 l_2}^1$, покажемо, що $\Gamma_{i_1 l_1}^2 \subset \Gamma_{i_2 l_2}^2$. За умовою $\Gamma_{i_1 l_1}^2 = \phi(\Gamma_{i_1 l_1}^1)$, $j = 1, 2$. Нехай i_2 -грань $\Gamma_{i_2 l_2}^2$ має вершини $W = \{w^1, w^2, \dots, w^{m_2}\} \subset \subset \{y^1, \dots, y^r\} = Y = \text{vert} M_2$, тоді вершини $\Gamma_{i_1 l_1}^2 = V = \{v^1, \dots, v^{m_1}\} \subset W \subset Y$. Нехай $U = \{u^1, \dots, u^{m_1}\} = \text{vert} \Gamma_{i_1 l_1}^1$, а $Z = \{z^1, \dots, z^{m_2}\} = \text{vert} \Gamma_{i_2 l_2}^1 \subset X = \{x^1, \dots, x^r\} = \text{vert} M_1$, тобто $U \subset Z \subset X$. Але M_1 і M_2 – центрально симетричні, отже $\forall x^i, z^j, u^t \exists y^i = \phi(x^i); w^j = \phi(z^j), v^t = \phi(u^t) \quad i \in J_s, j \in J_{m_2}; t \in J_{m_1}$. Оскільки $V \subset W$, то будь-яка опукла лінійна комбінація цих точок (тобто точка з $\Gamma_{i_1 l_1}^2$) належить $\Gamma_{i_2 l_2}^2$, що і треба було довести в 1).

2) Нехай $\Gamma_{i_1 l_1}^2 \subset \Gamma_{i_2 l_2}^2$, покажемо, що $\Gamma_{i_1 l_1}^1 \subset \Gamma_{i_2 l_2}^1$. Використовуючи позначення з 1), маємо таке. Оскільки $U \subset Z$, то будь-яка лінійна опукла комбінація цих точок (тобто точка з $\Gamma_{i_1 l_1}^1$) належить $\Gamma_{i_2 l_2}^1$, що і треба було довести в 2). Теорема доведена.

Теорема 12. Якщо мультимножини G_1 та G_2 мають спільну основу $S = (e_1, \dots, e_v)$ з властивістю: $e_{i+1} = e_i + \Delta$, $\Delta > 0$, $\forall i \in J_{v-1}$, та первинні специфікації $[G_1] = (\eta_1, \dots, \eta_v)$, $[G_2] = (\eta_v, \dots, \eta_1)$, то переставні многогранники $\Pi_{kv}(G_1)$ та $\Pi_{kv}(G_2)$ мають один і той же комбінаторний тип.

Доведення. Доведення теореми є наслідком з попередньо доведених теорем 7 та 11. Дійсно, за умови теореми згідно теореми 7 переставні многогранники $\Pi_{kv}(G_1)$ та $\Pi_{kv}(G_2)$ є центрально симетричними. Многогранник комбінаторно еквівалентні, якщо між їх граничними комплексами існує взаємно-однозначна відповідність φ , що зберігає порядок включення – це для переставних многогранників $\Pi_{kv}(G_1)$ та $\Pi_{kv}(G_2)$ випливає з теореми 11. Теорема доведена.

Наслідок. Один і той же комбінаторний тип мають переставні многогранники $\Pi_{kv}(G_1)$ та $\Pi_{kv}(G_2)$, якщо елементи основи мультимножини G_1 є $e_i = e_1 + (i-1)\Delta$, $\Delta > 0$; $i \in J_v$, а елементи основи G_2 є $\varepsilon_i = \varepsilon_1 + (i-1)\delta$, $\delta > 0$; $i \in J_v$, а $[G_1] = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{v-1}, \eta_v)$, $[G_2] = (\eta_v, \eta_{v-1}, \dots, \eta_2, \eta_1)$.

Доведення. Справедливість твердження випливає з теореми 12 та того факту, що комбінаторний тип не змінюється при розтягуванні (стисненні) простору R^n [3].

Висновки

Досліджено питання центральної симетрії переставних многогранників, використано ці результати в типізації переставних многогранників. Розглянута залежність між комбінаторним типом переставних многогранників та їх симетрією.

Література:

1. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. – К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487>
2. Стоян Ю.Г. Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств / Ю.Г. Стоян. – Харьков: Академия наук УССР, 1980. – 22 с. – (Препринт АН УССР/ Ин-т проблем машиностр.; 85).
3. Емеличев В.А. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников) / В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К. Кравцов. – М.: Наука. Глав. ред. физ-матем. лит., 1981. – 344 с.
4. Gaiha P. Adjacent vertices on a permutohedron / P. Gaiha, S.K. Gupta // SIAM J. Appl. Math, 1977. – V. 32, №2. – P. 323-327.
5. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев – К.: Наук. думка, 1986 – 268 с.
6. Леонова М.В. Переставні многогранники: центральна симетрія та комбінаторна еквівалентність / М. В. Леонова, О. О. Ємець // Інформатика та системні науки (ІСН-2014): Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 13-15 березня 2014 р.) . – Полтава: ПУЕТ, 2014. – С. 180-186.

Стаття надійшла 21.02.2014
Прийнято до друку 04.03.2014

Аннотация

Емец О.А., Леонова М.В.

Симметрия перестановочных многогранников, их комбинаторный тип.

В работе исследуется множество перестановок элементов заданного мультимножества, т.е. множество перестановок с повторениями. Исследованы свойства его

выпуклой оболочки – многогранника перестановок. При этом используется свойство, что множество перестановок совпадает с множеством вершин перестановочного многогранника. Изложение ведется с использованием терминологии мультимножеств (основание, кратность элементов, первичная спецификация). В работе исследуется центральная симметрия перестановочных многогранников, в частности рассмотрена центральная симметрия вершин, ребер и i -граней многогранника. Установлен критерий центральной симметрии вершин многогранника перестановок в случае постоянства разности двух соседних элементов основания мультимножества, и равенством равноудаленных от концов элементов кортежа, который является первичной спецификацией этого мультимножества.

Доказана центральная симметрия перестановочных многогранников, у которых мультимножества, определяющие перестановки, имеют общее основание со свойством постоянства разности элементов основания и первичными спецификациями, одна из которых образуется из другой изменением порядка следования элементов на противоположный. Показано, что многогранники, являющиеся выпуклыми оболочками множеств перестановок, описанных выше, – центрально симметричны. Доказана центральная симметрия перестановочного многогранника, когда в перестановках разные элементы, образующие арифметическую прогрессию.

На основе понятия граничного комплекса многогранника и его центральной симметрии, обоснованно, что одинаковый комбинаторный тип имеют перестановочные многогранники с общей основой и первичными спецификациями, которые являются симметричными относительно порядка элементов.

Ключевые слова: центральная симметрия, перестановочный многогранник, комбинаторный тип, множество перестановок.

Summery

O. A. Iemets, M. V. Leonova

Symmetry of permutations polyhedrons and their combinatorial type

In the article the set of permutations of the elements given multiset are investigated, namely the set of permutations with repetitions. The properties of its convex hull – permutations polyhedron are investigated. It uses the property that the set of permutations coincides with the set of vertices of the polyhedron. The presentation is made using the terminology of multisets (base, multiplicity of elements, the primary specification). In this paper the central symmetry of permutations polyhedron is investigated, in particular considered the central symmetry of vertices, edges and i -facets of the polyhedron. A criterion for the central symmetry of the vertices of permutation polyhedron is set in the case of constant difference between two adjacent base elements of the multiset, and equality of equidistant elements from the ends of the cortege, which is the basis of this multiset.

The article justifies the central symmetry of permutation polyhedrons in which the multisets defining permutations have a common basis with the property of constancy in difference between adjacent elements and their primary specifications are sequences, one of which is formed from the other by changing the order of the elements to the reversed one. It is shown that the polyhedrons which are convex hulls of permutations described above are centrally symmetric. The central symmetry of resettable polyhedron is proved when different elements are rearranged, forming an arithmetic progression.

Based on the notion of the boundary complex of a polyhedron and its central symmetry, it has been established that resettable polyhedron with a common basis and primary specifications that are symmetric with respect to the order of elements have the same combinatorial type.

Key words: central symmetry, permutation polyhedron, combinatorial type, the set of permutations.

УДК 004.652, 539.3

А.М. Назаренко, Б.Е. Панченко, С.А. Пилипенко

СХЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ SH-ВОЛНЫ НА СИСТЕМЕ НЕКРУГОВЫХ ЖЕСТКИХ ВСТАВОК В БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Предложен параллельный алгоритм численного решения динамической задачи теории упругости о взаимодействии гармонической SH-волны с системой тонких жестких вставок некруговой формы в бесконечной упругой среде. Краевая задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений, которые реализованы численно с использованием высокоточных схем. Приведены результаты расчета максимальных напряжений в окрестности вставок в зависимости от частоты колебаний и периода решетки отражателей.

Ключевые слова: краевая задача, волна сдвига, сингулярные интегральные уравнения, параллельные вычисления, система тонких жестких вставок некруговой формы.

Введение

При исследовании напряженно-деформированного состояния тел, которые содержат разные неоднородности, в рамках плоской или трехмерной динамической задачи эффективно работает метод интегральных уравнений. Так, этим методом в [1] изучается среда с системой радиальных тонких жестких вставок. В [2] рассматривается дифракция упругих волн в полупространстве с жесткой вставкой. Асимптотический подход к решению задач дифракции упругих волн на тонких включениях разного типа предложен в [3, 4]. В данной работе развивается подход [2] на случай взаимодействия SH-волны с системой жестких криволинейных вставок.

Проблема концентрации динамических напряжений вблизи различного рода препятствий [5] представляет значительный интерес при проектировании современных конструкций, работающих в условиях динамических нагрузок. Динамические задачи теории упругости в случае криволинейных разрезов для условий антиплоской и плоской деформации были рассмотрены в [6]. Вычисления динамических характеристик проводились здесь на основании асимптотического анализа интегральных представлений для производных от перемещений. Неизвестные плотности получены из решения системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ).

В [7] указанный подход был развит в серии задач о дифракции волн продольного сдвига и плоской деформации на системах отверстий или инородных включений, ограниченных замкнутыми кривыми некруговой формы.

Постановка задачи

Рассмотрим упругое изотропное пространство, ослабленное системой туннельных вдоль оси x_3 криволинейных жестких вставок $L_j (j = \overline{1, K})$ (рис.1), где L_j – простая разомкнутая дуга Ляпунова с началом в точке a_j и концом в точке b_j . При этом предполагаем, что $\cap L_j = \emptyset$ – система вставок не имеет общих точек).

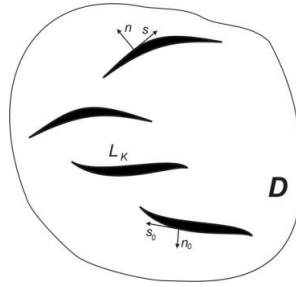


Рис.1

Считаем, что на берегах вставок перемещения при переходе через $L = \cup L_j$ непрерывны, а напряжения терпят разрыв. На вставке заданы смещения в виде константы:

$$W^{\pm} = \text{const}.$$

Или в более удобном виде:

$$\left[\frac{dW}{ds_0} \right]^{\pm} = 0 \quad (1)$$

Здесь верхний знак соответствует левому берегу вставки при движении от его начала к концу.

Для совокупности жестких вставок характерно то, что главный вектор усилий, возникающих на берегах L , равен нулю [2]. В дальнейшем эту закономерность выберем в качестве дополнительного условия.

Пусть из бесконечности излучается монохроматическая волна сдвига U_0 , нормаль к фронту которой составляет угол ψ_0 с осью x_1 :

$$\begin{aligned} U_0 &= \tau e^{-i\gamma(x_1 \cos \psi_0 + x_2 \sin \psi_0)}, \\ \tau &= \text{const}, \\ \gamma &= \frac{\omega}{c}, \\ c &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ω – частота колебаний, c – скорость распространения волны сдвига, μ – модуль сдвига, ρ – плотность среды, зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$.

В результате взаимодействия падающей U_0 волны с системой вставок возникает рассеянная волна перемещений U . Тогда суммарная амплитуда перемещений этой волны удовлетворяют волновому уравнению:

$$\begin{aligned} \Delta W + \gamma^2 W &= 0, \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad W = U + U_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений σ_{31}, σ_{32} представляют собой касательные напряжений в плоскости поперечного сечения цилиндров. Они связаны с перемещением формулами:

$$\sigma_{31} = \mu \frac{\partial W}{\partial x_1}, \quad \sigma_{32} = \mu \frac{\partial W}{\partial x_2}, \quad \sigma_{31} - i\sigma_{32} = 2\mu \frac{\partial W}{\partial z}, \quad z = x_1 + ix_2.$$

Касательное напряжение σ_n , действующее на L в точке $\zeta = \xi + i\eta \in L$ со стороны положительной нормали, равно:

$$\sigma_n = \sigma_{31} \sin \varphi - \sigma_{32} \cos \varphi = \operatorname{Im} \left\{ e^{i\varphi} (\sigma_{31} - i\sigma_{32}) \right\}, \quad (4)$$

где φ – угол между положительной касательной к L в точке ζ и осью x_1 .

Метод решения

Для механики разрушения определяющее значение имеет асимптотическое распределение напряжений в окрестности вершин дефекта [2]. Запишем интегральное представление амплитуды рассеянной волны в виде:

$$W(x_1, x_2) = -\frac{1}{4i} \int_L p(s) H_0^{(1)}(\gamma r) ds + U_0, \quad p(s) = \left[\frac{\partial W}{\partial n} \right] \quad (5)$$

Здесь $\left[\frac{\partial W}{\partial n} \right]$ – скачок производной по нормали амплитуды рассеянной волны на L ,

$H_0^{(1)}(x)$ функция Ханкеля первого рода, n -го порядка.

Функция $W(x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (3), условиям излучения на бесконечности [8] и обеспечивает непрерывность перемещения и скачек напряжения $\sigma_n = \mu \frac{\partial W}{\partial n}$ на L .

Из равенства нулю главного вектора сил, действующих на контуре L , вытекает условие, которому должна удовлетворять неизвестная функция $p(s)$:

$$\int_L p(s) ds = 0. \quad (6)$$

Подставляя в граничное условие (1) предельные значения производных функций Ханкеля при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$ [8] получаем интегральное уравнение:

$$\int_L [g(\zeta_0, \zeta) + G(\zeta_0, \zeta)] p(s) ds = N(\zeta_0), \quad (7)$$

$$g(\zeta_0, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\varphi_0}}{\zeta - \zeta_0} \right\}, \quad G(\zeta_0, \zeta) = \frac{\gamma}{4i} \left(H_1(\gamma r_0) - \frac{2}{i\pi\gamma_2 r_0} \right) \cos(\varphi_0 - \alpha_0),$$

$$N(\zeta_0) = \pi \gamma (e^{-i\gamma\eta_0}) \sin \varphi_0, \quad \zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0}, \quad \varphi_0 = \varphi(\zeta_0), \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L.$$

Представим каждый контур L_j из совокупности L в параметрической форме:

$$\zeta = \zeta(\beta), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \quad -1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1, \quad \zeta(-1) = a_j, \quad \zeta(+1) = b_j.$$

Из теории сингулярных интегральных уравнений [8] известно, что для обеспечения единственности решения интегрального уравнения в классе H^* необходимо и достаточно наложение одного дополнительного условия на неизвестную функцию. Таким дополнительным условием в рассматриваемой задаче является условие равенства нулю главного вектора сил, возникающих на берегах вставки (6). Система уравнений (7) с учетом (6) полностью определяет решение поставленной краевой задачи.

Умножим уравнение (7) на s'_0 и положим $p(s) = \frac{p_0(\beta)}{s'(\beta)}$. Получим параметрическую форму интегрального уравнения (7):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{p_0(\beta)}{\beta - \beta_0} + \frac{\gamma}{4i} \int_{-1}^1 \left\{ \operatorname{Re} \left(\zeta'_0 \frac{|\zeta_0 - \zeta|}{\zeta_0 - \zeta} \right) H_1^{(1)}(\gamma |\zeta_0 - \zeta|) + \frac{2}{i\pi\gamma(\beta - \beta_0)} \right\} p_0(\beta) d\beta = \pi \gamma e^{-i\gamma\eta_0} \eta'_c \quad (8)$$

Дискретизация задачи

Сингулярное интегральное уравнение (7) принадлежит к типу уравнений, подробно изученных в работе [8]. Численная реализация проводилась методом механических квадратур.

Представим неизвестную плотность $p(\beta)$ интегрального уравнения (7) как совокупность функций $\Omega_j(\beta^j)$, определенных на контурах $L_j, j = \overline{1, K}$ из следующего соотношения:

$$p_0(\beta) = \frac{\Omega(\beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \cos \theta.$$

Уравнение, соответствующее одному из контуров L_j , удовлетворяется в узлах Чебышева второго рода $\theta_m = \frac{\pi m}{n_j} \quad (m = \overline{1, n_j - 1})$ и сводится к системе алгебраических уравнений относительно значений функции $\Omega_j(\beta)$ в узлах Чебышева первого рода $\theta_k = \frac{2k - 1}{n_j} \pi \quad (k = \overline{1, n_j})$, где n_j – число точек разбиения контура L_j .

Для интеграла типа Коши используем квадратурную формулу:

$$\int_{-1}^1 \frac{\Omega_j(\beta)}{\sqrt{1 - \beta^2} (\beta - \beta_m)} d\beta \approx \frac{\pi}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\Omega_j(\beta_k)}{\beta_k - \beta_m}, \quad \beta_m = \cos \theta_m, \quad \beta_k = \cos \theta_k.$$

К интегралу, содержащему регулярное ядро $D(\beta_0, \beta)$ и имеющему корневую особенность, применяем квадратурную формулу Гаусса:

$$\int_{-1}^1 \frac{\Omega_j(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} D(\beta_m, \beta) d\beta \approx \frac{\pi}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} D(\beta_m, \beta_k) \Omega_j(\beta_k).$$

Система линейных алгебраических уравнений относительно функций $\Omega_j, j=\overline{1, K}$ приобретает вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_j} B_{mk}^j \Omega_j(\beta_k) &= T_m^j, \quad \sum_{k=1}^{n_j} \Omega_j(\beta_k) = 0, \\ B_{mk} &= \frac{\pi}{N} \left\{ \frac{\gamma_2}{4i} \operatorname{Re} \left(\zeta'_m \frac{|\zeta_m - \zeta_k|}{\zeta_m - \zeta_k} \right) H_1^{(1)}(\gamma_2 |\zeta_m - \zeta_k|) \right\}, \\ T_m &= i\gamma_2 e^{-i\gamma\eta_m} \eta'_m. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, при численной реализации СИУ (8), (6) задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (9) с

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_K$$

неизвестными.

Схема вычислений

В работе проведено численное исследование описанной задачи. С целью проверки сходимости построенного алгоритма рассмотрен случай нормального падения волны сдвига на систему, состоящую из параболических вставок, расположенных в упругом пространстве на одинаковом расстоянии одна от другой и симметрично ориентированных вдоль оси x_1 (рис. 2). Однако число вставок справа и слева от центральной не является обязательно равным ($L_{-T} \neq L_K$).

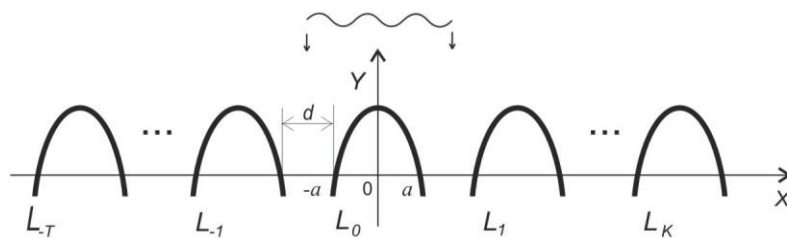


Рис. 2

Параллельно-конвейерная схема вычислений [10] построена аналогично [7, 9]. Тут также вычисления имеют следующие этапы: синтез массивов исходных данных, синтез матрицы СЛАУ, решение СЛАУ методом Гаусса, синтез массивов итоговых решений. Первый, второй и четвертый этапы макроконвейера не требуют пересылок данных, что означает независимость вычислений. На третьем этапе для решения СЛАУ существует оптимальное число процессов, определяемое спецификой матрицы. Это означает, что

для 1, 2 и 4 этапов алгоритма оптимальным является число процессов, соответствующее числу коэффициентов СЛАУ.

В данной методике решения краевой задачи основной операцией является определение текущего расстояния между точками коллокации и интегрирования, заданного на множестве значений параметрических координат на линиях жестких вставок. Указанное расстояние является аргументом фундаментального решения, т.е. функции Ханкеля. И поскольку комбинации самих функций Ханкеля и коэффициентов при них являются элементами матрицы СЛАУ, указанная процедура может быть базовой при разработке приложения. Как показано в [7], алгоритм хорошо масштабируется по вычислительным узлам.

Вычислительный процесс решения СЛАУ распараллеливается согласно [7]. Параллельное вычисление итоговых искомых характеристик осуществляется путем подстановки массивов значений неизвестных функций $\Omega_k(\beta_p)$ в интегральные представления решений аналогично процедурам формирования матрицы СЛАУ. Для решения СЛАУ эффективнее использовать построчное распараллеливание, когда пересылки и вычисления находятся в балансе.

В качестве примера рассматривалось бесконечное пространство, содержащее систему тонких жестких вставок параболического сечения:

$$\xi = p_1\beta, \eta = h + p\xi^2, -1 \leq \beta \leq 1.$$

Очевидно, что размер матрицы пропорционален числу вставок. Благодаря распараллеливанию точность получаемых результатов соответствует 10^{-10} .

Численные исследования

Асимптотическое распределение напряжения δ_n в окрестности концов L определяется сингулярной частью:

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p(s)}{\zeta - z} ds = \begin{cases} 1 \\ i \end{cases} \frac{\Omega(\mp 1)e^{-i\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{2s'(\pm 1)}\sqrt{z - c}} + O(\rho_0^0),$$

$$z - c = \rho_0 e^{i\theta_c}, \quad s'(\mp 1) = \left. \frac{ds}{d\beta} \right|_{\beta=\mp 1}.$$

Здесь верхний знак берется при $c = a_j$, нижний – при $c = b_j$; φ_c – угол между положительной касательной к L в точке c и осью x_1 .

$$\sigma_n^{a_j} = \frac{\mu}{2\sqrt{2\rho_0 s'(+1)}} \operatorname{Re}\{\Omega(\mp 1)e^{-i\alpha}\} \cos \psi_{a_j} + O(\rho_0^0),$$

$$\sigma_n^{b_j} = \frac{\mu}{2\sqrt{2\rho_0 s'(-1)}} \operatorname{Re}\{\Omega(\mp 1)e^{-i\alpha}\} \sin \psi_{b_j} + O(\rho_0^0), \quad \psi_c = \frac{\theta_c - \varphi_c}{2}.$$

Значения функции $\Omega(\beta)$ на концах отрезка:

$$\begin{aligned}\Omega(-1) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+N} \Omega_k \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2}, \\ \Omega(+1) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \Omega_k \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2}\end{aligned}\quad (10)$$

Видно, что максимальные напряжения являются контактными ($\theta_{a_j} = \varphi_{a_j}, \theta_{b_j} = \varphi_{b_j} - \pi$):

$$\sigma_n(\mp 1) = \frac{\mu}{2\sqrt{2\rho_0 s'(\mp 1)}} \operatorname{Re}\{\Omega(\mp 1)e^{-i\alpha}\}$$

В работе проводились вычисления безразмерной величины, характеризующей контактные напряжения:

$$\delta = \frac{|\Omega(\mp 1)|}{2\tau\gamma\sqrt{ls'(\mp 1)}}. \quad (11)$$

Результаты тестовых исследований для максимальных напряжений δ вблизи одиночной жесткой вставки ($K=1$) в бесконечной упругой среде приведены на рис. 3. Тут кривые 1 и 2 соответствуют $p=-0,5$ и $p=0,5$. Кривые полностью совпадают с результатами работы [9].

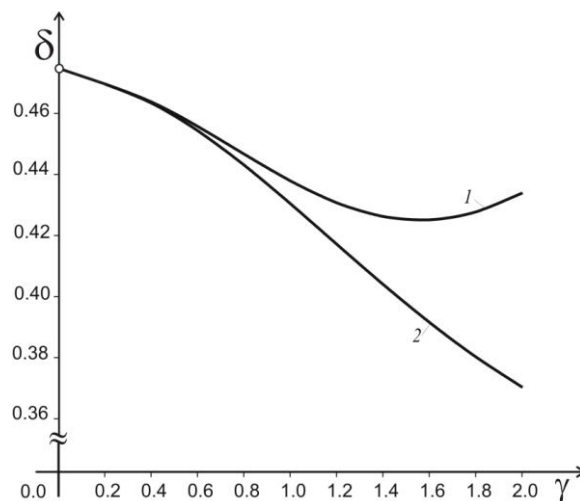


Рис. 3

Также проведены вычисления при $K=3$ и $d=10^7$ (рис.2), что определяет значительное удаление вставок одна от другой. Результаты для каждой удаленной вставки с точностью до 10^{-6} совпадают между собой, а также совпадают с результатами, полученными для одиночной жесткой вставки. Это говорит о достоверности исследуемого алгоритма.

Численное исследование показало, что базовая часть алгоритма, по которой определяются плотности СИУ, а также компоненты напряженно-деформированного состояния в области по формулам типа (5) имеют высокую скорость сходимости. Точность вычислений напряжений и перемещений до 10^{-10} достигается уже при 100 точках коллокации каждого контура. Как и в [7], сходимость алгоритма также не

зависит от числа вставок. Однако интерполяционный процесс (10, 11) для асимптотических контактных напряжений существенно замедляет сходимость алгоритма. Тут для достижения точности 10^{-10} необходимо уже около 500 точек коллокации, что существенно замедляет не распараллеленный алгоритм. Обусловленность матриц при этом проверялась на основании алгоритма, описанного в [12].

Исследована система вставок ($K = 3, d = 2$) при $p = 0,5$ и $p = -0,5$ для крайнего (рис. 4а) и центрального (рис. 4б) отражателя. Кривые 1 и 2 соответственно показывают зависимость величины δ от волнового числа. А для той же системы вставок при $k = 3, \gamma = 1,7$ ($p = 0,5$ и $p = -0,5$) на рис. 5а,б кривые 1 и 2 показывают зависимость величины δ от расстояния между отражателями.

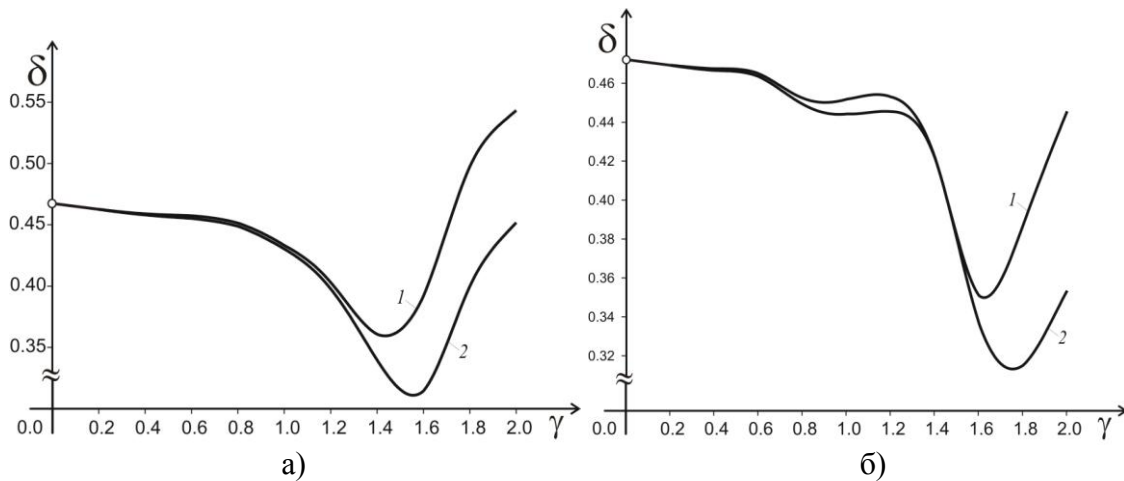


Рис.4

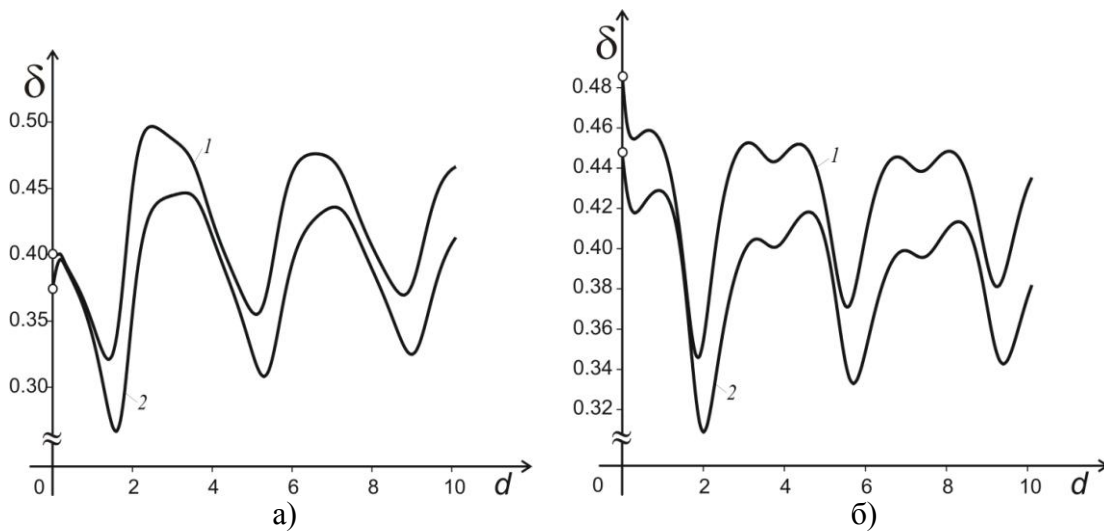


Рис.5

Данные результаты были получены с помощью приложения, написанного на C++ и поддерживаемого современными кластерными системами. Как и в [7, 11], кривизна кривой существенно искажает волновые поля напряжений в окрестности дефекта. Полное совпадение результатов с [9] гарантируют достоверность полученных новых выводов.

Выводы

В задаче дифракции SH-волны на системе жестких вставок параллельные алгоритмы позволяют значительно сократить время вычислений и более детально проанализировать характеристики волнового поля. Сочетание метода интегральных уравнений, который снижает на единицу размерность задачи, и значительная экономия времени вычислений за счет распараллеливания вычислительных процедур приводит к существенному увеличению эффективности предложенного алгоритма.

Литература

1. Попов В.Г. Взаимодействие плоских упругих волн с системами радиальных дефектов. – Механика твердого тела. – 1999.-№4.-С.118-129.
2. Назаренко А.М., Фильштинский Л.А. Взаимодействие волн напряжения с жесткими вставками в полупространстве (плоская деформация). – Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. - №4. – С.95-102.
3. Емец В.Ф., Кит Г.С., Кунец Я.И. Асимптотическое поведение решения задачи рассеяния упругой волны тонкостенным инородным включением. – Изв. ВАН. Механика твердого тела. – 1999. - №3. – С.55-64.
4. Лавров Н.А. Уравнения динамики тонкого жесткого включения в упругой среде. – Преп. Институт проблем машиноведения. РАН. – 1993. – №91. – С.1-43.
5. Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г., Яковлев В.В. Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах. – К.: Наук. думка, 1985. – 136 с.
6. Фильштинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде. – Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – №4. – С. 119 -127.
7. Панченко Б.Е., Назаренко А.М., Каркасный анализ предметной области: Стационарные динамические задачи теории упругости для изотропных сред с произвольными неоднородностями, Кибернетика и системный анализ, 2013, – №1. – С. 172–187.
8. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К: Наук. думка, 1984. – 344 с.
9. Назаренко А.М., Фильштинский Л.А. Решение второй краевой задачи динамической теории упругости для трещины продольного сдвига. – Динамика и прочность машин. Респ. межвед. научно-техн. сб., 1982, вып.35, С. 32-35.
10. Вертгейм И.И., Терпугов В.Н. Параллельные технологии вычислений в механике сплошных сред и МДТТ.: Учебное пособие. – Пермь, 2007. – 84 с.
11. Назаренко А.М., Панченко Б.Е., Пилипенко С.А. Схема параллельного решения задачи дифракции SH-волн на системе некруговых трещин в бесконечной упругой среде // Проблемы программирования. – 2014. №2–3.– С. 82-87.
12. Химич А.М., Поляно В.В. Эффективность двумерных блочно-циклических параллельных алгоритмов. – Проблемы программирования – 2008. – №3. – С. 145-149.

Стаття надійшла 25.02.2014
 Прийнято до друку 04.03.2014

Анотація

О.М. Назаренко, Б.Є. Панченко, С.О. Пилипенко

Схема паралельних обчислень у задачі дифракції SH хвиль на системі некругових жорстких включень в нескінченному пружному середовищі

Запропонований паралельний алгоритм чисельного розв'язання динамічної задачі теорії пружності про взаємодію гармонійної SH-хвилі з системою тонких жорстких некругових включень в нескінченному пружному середовищі. Крайова задача зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь, які реалізуються чисельно з використанням

високоточних схем. Наведені результати розрахунків максимальних напружень на околах кінців залежно від частоти коливань і період решітки відбивача, наведені.

Ключові слова: крайова задача, хвиля зсуву, сингулярні інтегральні рівняння, паралельні обчислення, система тонких жорстких вставок некругової форми.

Summary

A.M. Nazarenko, B.E. Panchenko, S.A. Pilipenko

Scheme of parallel computing of the problem of diffraction of SH waves on a system of non-circular stiff inclusions in an infinite elastic medium

A parallel algorithm of a numerical solution of a stationary dynamic problem of the elasticity theory on the interaction of harmonic SH-waves with a system of thin stiff non-circular inclusions in an infinite elastic medium, is offered. The boundary value problem is reduced to a system of singular integral equations that are realized numerically with the use of high-precision schemes. The results of calculations of maximum contact stresses along the boundaries of the inclusions depending on the oscillation frequency and the period of the reflector grid, are given.

Key words: boundary-value problem, shear wave, singular integral equations, parallel computings, system of thin non-circular stiff inclusions

УДК 532.5; 551.465

Павел В. Лукьянов

ЗАВИСИМОСТЬ ДИНАМИКИ СУБМЕЗОМАСШТАБНОГО КОМПАКТНОГО ВИХРЯ ОТ ЕГО ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ

Представлены результаты исследования динамики компактного вихря от его внутренней горизонтальной структуры. Выявлен тип вихрей, обладающий такой горизонтальной структурой, при которой диффузионный рост компенсируется конвекцией (стоком), обуславливающим квазистационарное состояние течения. Горизонтальная структура вихря состоит из трех областей. Первая, довольно тонкая (приблизительно 10% от толщины), находится у оси вихря. Затем следует широкая (приблизительно 80% от толщины вихря) область с отсутствием завихренности (течение наподобие точечного вихря). Третья, внешняя область вихря, также тонкая (приблизительно 10% от толщины), но имеет завихренность противоположного знака той, что в первой области. Величины указанных завихренностей таковы, что в целом вихрь компенсирован (суммарная завихренность равна нулю). Приведено сравнение с известными теоретическими и экспериментальными данными по этой теме.

Ключевые слова: компактный вихрь, внутренняя структура, диффузионно-конвективный баланс

Введение. Цель работы

В природе многие явления наглядно подтверждают третий закон Ньютона: *действие равно противодействию*. Иными словами, существует определенный механизм компенсации между двумя и более силами. В гидромеханике, также как и во многих других отраслях науки, существует ряд примеров такой компенсации. Так, открытые впервые во время численного эксперимента уединенные волны, получившие название *солитонов*, – пример компенсации двух сил [1– 4]. В начале 60-х годов прошлого столетия целым шоком для океаногрофов было открытие глубоководных вихрей, получивших название *модонов*. В работе [5] указано, что одним из условий существования модонов является исчезающая с ростом расстояния от их центра циркуляция. Модоны относятся к мезомасштабным, или синоптическим, образованиям [5]. Хетоны [6], – пары бароклинных вихрей с нулевой суммарной интенсивностью, – также существуют в виде компактных (уединенных) образований благодаря наличию механизма компенсации.

Многочисленные исследования морей и океанов, а впоследствии фотографии со спутников, указывают на существование компактных вихревых структур. Кинематическим условием существования компактного вихря есть компенсация поля завихренности [7], которая справедлива для любой формы течения – ламинарной или турбулентной, с учетом вязкости жидкости или без [8]. В зависимости от масштаба явления (вихря), те или иные силы играют первостепенную роль: на их основе производится обезразмеривание уравнений, описывающих интересующий нас физический процесс. Компактные компенсированные вихри планетарных (500 км – первые тысячи км) и мезомасштабных (50 км – первые сотни км) хорошо изучены. В то же время субмезомасштабные (с горизонтальным масштабом приблизительно 1–10 км) вихревые образования на шельфе (с вертикальным масштабом приблизительно 10–100 м) – наиболее слабо изученная область динамики морей и океанов [9].

Целью данной работы является изучение зависимости вырождения (диффузия) компактного вихря от его начальной формы горизонтальной структуры.

Постановка задачи

Данная работа посвящена динамике уединенного свободного вихря, находящегося вдали от горизонтальных границ. Поэтому в качестве физической области рассмотрим слой жидкости переменной глубины: $(x, y) \in [-l_x, l_x] \times [-l_y, l_y]$, $z \in [0, H(x)]$. Полагается, что жидкость имеет устойчивую плотностную стратификацию:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \left\{ 1 + \left(\exp \left[\left(\frac{(h - h_1) - z}{l_v} \right)^2 \right] - 1 \right) N^2 (z / l_v) / g \right\}, & 0 \leq z \leq h - h_1; \\ \rho_0, & h - h_1 \leq z \leq h. \end{cases} \quad (1)$$

где h_1 – глубина верхнего перемешанного слоя, l_v – начальная толщина вихря; N^2 – квадрат частоты Брента-Вайсяля; g – ускорение свободного падения.

Топография дна задаётся в явном виде одной из возможных функций глубины [10,11]:

$$H(x) = \begin{cases} h_{\min}, & -l_x \leq x \leq -l_x + x_0; \\ h_{\min} + (h - h_{\min}) (1 - \exp(-\alpha [(x - (-l_x + x_0)) / l_h])), & -l_x + x_0 \leq x \leq l_x. \end{cases} \quad (2)$$

В выражениях (1,2) $h, h_{\min}$ – максимальная и минимальная глубина области соответственно; l_h – начальный горизонтальный масштаб (радиус) вихря, x_0 – координата начала склона, α – параметр, характеризующий скорость изменения глубины. Рельеф дна показан на рис. 1, где по оси ординат отложена функция $L(x) = (h - H(x)) / l_v$. Легко показать, что при таком функциональном задании топографии дна сохраняются непрерывность функций и её производных. Ещё важным моментом есть то, что вблизи вертикальных границ $x = \pm l_x$ дно является горизонтальным, что используется далее при формулировке граничных условий.

Для описания горизонтальной турбулентной диффузии используется широко известная модель Смагоринского. Коэффициенты горизонтальной турбулентной диффузии поля скорости A_m и плавучести A_n вычисляются по формулам:

$$A_m = \frac{1}{2} C_m \Delta x \Delta y \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 \right], \quad A_n = \frac{A_m C_n}{C_m},$$

где C_m, C_n – постоянные. $C_m = 0,1$, $C_n = 0,2C_m$, $\Delta x, \Delta y$ – горизонтальные размеры расчетной сетки. Индексы m, n относятся соответственно к диффузии поля скорости и плотности (плавучести).

Коэффициент вертикальной турбулентной диффузии находится по модели Прандтля-Обухова [12,13], согласно которой:

$$\begin{cases} K_z = (0,05h_2)^2 \sqrt{B} + K_{\min} & \text{при } B > 0, \\ K_z = K_{\min} & \text{при } B < 0. \end{cases} \quad B = \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} \right)^2 + b,$$

где V_x, V_y – средние значения горизонтальных компонент скорости, b – плавучести, h_2 – глубина квазиоднородного слоя, определяемая по первой от поверхности расчетной точки, в которой выполняется условие:

$$(0,05z_k)^2 \sqrt{B_{z=z_k}} \leq K_{\min},$$

где $K_{\min}$ – фоновое значение коэффициента вертикального турбулентного обмена, Z_K определяется из последнего неравенства. Коэффициенты вертикальной турбулентной диффузии полей плавучести и скорости связаны числом Струхала, которое в данной работе полагалось равным 20 (для температурной стратификации).

В прямоугольной декартовой системе координат, вертикальная ось которой направлена вертикально вверх, уравнения, описывающие динамику стратифицированной жидкости, имеют следующий вид [14]:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + fV_y + \nabla A_m \nabla V_x + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - fV_x + \nabla A_m \nabla V_y + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + b + \nabla A_m \nabla V_z + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + V_x \frac{\partial b}{\partial x} + V_y \frac{\partial b}{\partial y} + V_z \frac{\partial b}{\partial z} - S(z)V_z = \nabla A_n \nabla b + \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi \frac{\partial b}{\partial z} \right), \quad (7)$$

В системе уравнений (3)–(7), V_z, p, b – средние значения вертикальной компонент вектора скорости, а также возмущения полей давления и плавучести; при этом $b = -g\rho/\rho_0$; $S(z)$ – функция, описывающая устойчивую стратификацию, согласно (1); A_m, A_n, K_z, χ – коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии полей скорости и плавучести (плотности). Уравнения (3)–(7) дополняются граничными и начальными условиями. Компонента силы Кориолиса в уравнении (5) не учитывается в виду ее относительной малости для сплюснутых вихрей.

Граничные условия на дне выбраны стандартные: отсутствие течения (условия прилипания) и потока плавучести:

$$V_x = 0, \quad V_y = 0, \quad V_z = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial n} = 0. \quad (8)$$

На свободной поверхности задаются ветровые напряжения, а также отсутствие возмущений давления и плавучести:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} - \delta^2 \frac{\partial V_z}{\partial x} = -\frac{\tau_{zx}}{K_z}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} - \delta^2 \frac{\partial V_z}{\partial y} = -\frac{\tau_{zy}}{K_z}, \quad p = 0, \quad b = 0. \quad (9)$$

Первые два равенства заменяются, в условиях пространственной анизотропии ($\delta = 10^{-2}$), на соответствующие им приближенные:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{\tau_{zx}}{K_z}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{\tau_{zy}}{K_z}. \quad (10)$$

Последним граничным условием является приближение «твердой крышки»:

$$V_z = 0. \quad (11)$$

Важно отметить, что последнее из соотношений (8), с учетом плавного изменения функции топографии дна и пространственной анизотропии в данной задаче, можно, с точностью до малого параметра δ , заменить на более простое – равенство нулю вертикальной производной:

$$\frac{\partial b}{\partial z} \approx 0.$$

По горизонтали на боковых границах ($x = \pm l_x$, $y = \pm l_y$) для всех, без исключения, искомых функций задаются условия равенства нулю их производных по переменным x и y соответственно.

В качестве начальных условий, задаются согласованные поля азимутальной скорости и плавучести. Поскольку изучение зависимости внутренней когерентной (долгоживущей, согласованной с физикой явления) структуры вихря является центральным вопросом данной работы, рассмотрим его подробно. Остановимся сначала на вертикальных составляющих полей азимутальной скорости и плавучести. Распределение для азимутальной скорости задается в виде:

$$f_V(z) = (z - (z_0 + a_1))^2 (z - (z_0 - a_2))^2 / l_V^2, \quad z_0 - a_2 \leq z \leq z_0 + a_2.$$

Вертикальная структура поля плотности описывается зависимостью:

$$b_z = (z - (z_0 + a_1))^3 (z - (z_0 - a_2))^3 \times (z - z_0 + 0.5(a_1 - a_2)) / l_V^7, \quad z_0 - a_2 \leq z \leq z_0 + a_2.$$

В приведенных соотношениях z_0 – положение центра вихря (горизонт); a_1, a_2 – толщину верхней и нижней частей вихря. Такой вид позволяет, при начальной толщине вихря близкой к глубине слоя жидкости и произвольном горизонте, очень быстро, в масштабах безразмерного времени, получить трехмерное течение, удовлетворяющее перечисленным выше граничным условиям. Вариация начального вида вертикальной структуры не менялась, задаваясь в классе последних соотношений.

Для исследования когерентности горизонтальной структуры в вихре использовались два класса решений. Первый – частные случаи общего автомодельного решения задачи турбулентной диффузии вихря [15]:

$$\Omega = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k \eta^{k-1}, \quad \text{где } A_{k+2} = -\frac{3(k+n)}{2(k+1)^2} A_k, \quad k=1,3,\dots \quad (12)$$

для $n=3;5$. В (12) Ω – функция вертикальной компоненты завихренности.

Второй класс – два вида компактных компенсированных вихря, являющихся по сути решениями стационарных уравнений Навье-Стокса, то есть описывающих установившееся ламинарное вращение вязкой жидкости. Первый из них – это вихрь, состоящий из двух областей постоянной завихренности противоположного знака [15,16]:

$$V_\theta = \begin{cases} \frac{V_0 r}{a}, & 0 \leq r \leq a; \\ V_0 a \left[\frac{1}{r} \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2} \right) \right], & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad \omega_z = \begin{cases} \frac{2V_0}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ -\frac{2V_0 a}{R^2 - a^2}, & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Второй – более сложный, состоящий из трех областей постоянной завихренности. В этом случае, как правило, получается на периферии вихря зона с противотечением.

$$V_\theta = \begin{cases} 0.5\Omega_0 r, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (r^2 - a^2)}{2r}, & a \leq r \leq R_1; \\ \frac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)}{2r} - \\ - \frac{[\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)](r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)2r}, & R_1 \leq r \leq R_2; \\ 0, & r > R_2. \end{cases} \quad \omega_z = \begin{cases} \Omega_0, & 0 \leq r \leq a; \\ \Omega_1, & a \leq r \leq R_1; \\ -\frac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)}{R_2^2 - R_1^2}, & R_1 \leq r \leq R_2; \\ 0, & r > R_2. \end{cases}$$

Независимо от их вертикальной структуры, сами осесимметричные вихри являются точными решениями квазигеострофических уравнений на f -плоскости [17]. С течением времени происходит генерация радиальной и вертикальной компонент скорости – задача становится существенно нелинейной.

Перейдем теперь к безразмерным величинам. Для этого за основу положим три баланса: между горизонтальным градиентом давления и горизонтальной адвекцией; гидростатический, а также между слагаемыми $\frac{\partial b}{\partial t}$ и $-S(z)V_z$.

Из сказанного выше, а также из существующих подходов, следует, что масштабы всех входящих в уравнения величин равны:

$$[x]=[y]=l_h, [z]=l_v, \delta=l_v/l_h, [t]=V_h/l_h, [V_x]=[V_y]=V_h, [V_z]=Fr_V^2 \delta V_h, [S]=N^2, \\ [P]=\rho_0 V_h^2, [b]=N^2 V_z, [A_m]=A_m, [A_n]=A_{n\max}, [K_z]=K_{z\max}, [\chi]=\chi_{\max}.$$

Основываясь на этих соотношениях, система размерных уравнений (3)-(7) может быть переписана в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + Fr_V^2 V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Ro} V_y + \frac{1}{Re_h} \nabla \overline{A_m} \nabla V_x + \frac{1}{\delta Re_v} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{K_z} \frac{\partial V_x}{\partial z} \right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + \text{Fr}_V^2 V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\text{Ro}} V_x + \frac{1}{\text{Re}_h} \nabla \overline{A_m} \nabla V_y + \frac{1}{\delta \text{Re}_V} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{K_z} \frac{\partial V_y}{\partial z} \right), \quad (14)$$

$$\text{Fr}_V^2 \delta^2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + b + \frac{\delta}{\text{Re}_h} \nabla \overline{A_m} \nabla V_z + \frac{1}{\text{Re}_V} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{K_z} \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \quad (15)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \text{Fr}_V^2 \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + V_x \frac{\partial b}{\partial x} + V_y \frac{\partial b}{\partial y} + \text{Fr}_V^2 V_z \frac{\partial b}{\partial z} - V_z = \frac{1}{\text{Sc}_h \text{Re}_h} \nabla \overline{A_n} \nabla b + \frac{1}{\delta \text{Sc}_V \text{Re}_V} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{\chi} \frac{\partial b}{\partial z} \right) \quad (17)$$

где $\overline{A_m}, \overline{A_n}, \overline{K_z}, \overline{\chi}$ – безразмерные функции коэффициентов горизонтальной и вертикальной диффузии полей скорости и плавучести (плотности). $\text{Re}_h = l_h V_h / A_m$, $\text{Re}_V = l_V V_h / K_z$, $\text{Fr}_V = V_h / M_V$, $\text{Ro} = V_h / l_h / f$ и $\text{Sc}_h = A_n / A_m$, $\text{Sc}_V = \chi / K_z$ горизонтальное и вертикальное числа Рейнольдса, а также числа Фруда, Россби и Струхала соответственно; $l_V \in O(100)$ м, $l_h \in O(10^3 - 10^4)$ м, $V_h \in O(10^{-1})$ м/с – начальные вертикальный и горизонтальный масштабы вихря, а также начальный масштаб скорости; f – параметр Кориолиса.

Из всех перечисленных выше граничных условий в безразмерном виде отличия будут лишь для касательных напряжений ветра:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{l_V}{V_h} \frac{[\tau_{zx}]}{\mu} \tau_{zx}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{l_V}{V_h} \frac{[\tau_{zy}]}{\mu} \tau_{zy}.$$

Поскольку рассматриваемая область имеет криволинейную границу в вертикальном направлении, удобно, для данной задачи, перейти от координаты z к новой вертикальной координате $z_1 = z / H(x)$. При этом вертикальная компонента скорости в новых переменных связана со старой соотношением $V_z = H(x) V_{z_1}$. Для удобства, оставим в уравнениях прежнее выражение вертикальной скорости (V_z), перейдя лишь к новой переменной $z_1(x)$. Уравнения (13-17) приобретут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + \text{Fr}_V^2 V_z \frac{\partial V_x}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} = & - \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) + \frac{1}{\text{Ro}} V_y + \\ & + \frac{1}{\text{Re}_h} \left[\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) + \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z_1} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial x} \right] + \\ & + \frac{1}{\text{Re}_V \delta} \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial z}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + \text{Fr}_V^2 V_z \frac{\partial V_y}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\text{Ro}} V_x + \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\text{Re}_h} \left[\left[\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z_1} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial x} \right] + \\
& + \frac{1}{\text{Re}_v \delta} \left[\frac{\partial^2 V_y}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial z}, \\
& \text{Fr}_V^2 \delta^2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} + b + \\
& + \frac{\delta}{\text{Re}_h} \left[\left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z_1} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial x} \right] + \\
& + \frac{1}{\text{Re}_v} \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial z}, \tag{20}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \text{Fr}_V^2 \frac{\partial V_z}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} = 0, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial b}{\partial t} + V_x \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) + V_y \frac{\partial b}{\partial y} + \text{Fr}_V^2 V_z \frac{\partial b}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} V_z = \frac{1}{\text{Sc}} \left\{ \frac{1}{\text{Re}_h} \left[\left[\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left[\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial z_1} + \frac{\partial^2 b}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_v \delta} \left[\frac{\partial^2 b}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial z} \right\} \frac{\partial z_1}{\partial z}, \tag{22}
\end{aligned}$$

Покажем, что граничные условия на боковых границах остаются прежними. Пусть $\varphi_i (i=1,2,3,4)$ – одна из искомым функций (компонент скорости и плавучесть). Тогда

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x}$$

на обеих границах $x = \pm l_x$. Однако, геометрия области в данной задаче выбрана именно так, что $\frac{\partial z_1}{\partial x} = 0$ при $x = \pm l_x$. Поэтому в новой системе координат все условия на боковых границах сохраняют свой прежний простой вид:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = 0. \tag{23}$$

Граничные условия на свободной поверхности имеют теперь следующий вид:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} = - \frac{l_v}{V_h} \frac{[\tau_{zx}]}{\mu} \tau_{zx} \quad \text{при } x = \pm l_x \quad \frac{\partial V_y}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} = - \frac{l_v}{V_h} \frac{[\tau_{zy}]}{\mu} \tau_{zy} \quad \text{при } y = \pm l_y \tag{24}$$

Граничные условия прилипания на дне не изменяются. Однако нормальная к поверхности дна производная от функции плавучести, как указано выше, может быть

заменена, с точностью до малого параметра δ , обычной производной по новой вертикальной координате.

$$\frac{\partial b}{\partial z_1} = 0. \quad (25)$$

Таким образом, задача свелась к решению уравнений (18-22) с соответствующими им граничными и начальными условиями.

Результаты численных экспериментов и их обсуждение

Данным исследованиям предшествовал ряд работ, в которых были изучены взаимодействия компактного вихря с дрейфовым приповерхностным течением, роль величины стратификации, кривизны дна и пространственной анизотропии (сплюснутость) на его динамику и устойчивость вообще как структуры. Поэтому численный эксперимент, согласно со сформулированной выше целью работы, проводился в довольно узком диапазоне вариации параметров. Во всех случаях (максимальный) масштаб глубины был равен 100 м. Начальная толщина вихря – 80 м, начальный радиус – 5 км. Масштаб азимутальной скорости задавался $0,5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, фоновое значение вертикальной турбулентной диффузии $K_z = 0.0005 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$. Соответствующие безразмерные параметры равны $\text{Re}_v = 8 \cdot 10^4$, $\delta = 1,6 \cdot 10^{-2}$, $\text{Fr}_v^2 = 1,56$, $\text{Ro} = 0,97$, $\text{Sc}_h = 5$, $\text{Sc}_v = 20$. Размеры сетки по горизонтальным координатам выбирались $\Delta x = \Delta y = 0.025$, по вертикальной – ≈ 0.02 .

Выбранный начальный вертикальный размер вихря позволяет поместить его под слой приповерхностного дрейфового течения с масштабом 10 м и на небольшом расстоянии от дна – чтобы как можно быстрее произошло установление трехмерного течения, у которого есть все три компоненты скорости. Как указано во введении, варьировалась лишь начальная форма горизонтального распределения всех характеристик: поля скорости и возмущений плавучести согласно приведенным выше формулам.

Прежде всего, была рассмотрена эволюция (циклонического) вихря без учета кривизны дна и ветрового воздействия. На вихрь действовали лишь механизмы вертикальной и горизонтальной турбулентных диффузий, а также сила Кориолиса. Анализ данных показал, что можно сравнивать качественно схожие в начальный момент типы вихрей. Так изолированный гауссиан и компактный компенсированный вихрь, состоящий из двух областей постоянной завихренности разного знака ведут себя очень схоже. При этом, в случае компактного компенсированного вихря, задавались два размера ядра – 0.3 и 0.6 радиуса вихря. На рис. 2 представлены распределения азимутальной скорости и вертикальной компоненты завихренности в начальный момент времени и в последующие характерные безразмерные моменты $t = 1; 2$. Как следует из сравнения рис. 2а и рис. 2в, все три распределения азимутальной скорости со временем становятся схожими одно на другое. Следовательно, это и есть когерентная структура. Распределение вертикальной компоненты завихренности, хотя и не так хорошо как скорости, также имеет определенную когерентную структуру независимо от формы начальных данных (см. рис. 2б и рис. 2г). Отметим её особенности. Если во всех трех начальных распределениях были две области завихренности разных знаков, а азимутальная скорость – везде одного знака, то со временем, в условиях действия указанных физических механизмов (диффузии и

планетарного вращення), когерентной оказывается структура, в которой на периферии вихря есть, хотя и не значительная по амплитуде, зона противотечения, а поле завихренности дважды меняет знак. Следует отметить, что в атмосферных компактных вихрях, – торнадо, – наблюдается подобная, но более ярко выраженная, структура [18].

Свойствами указанной выше структуры качественно соответствуют частные автомодельные решения (12) с номерами 4 и 5. Последним также приближенно соответствуют компактные компенсированные вихри с тремя областями завихренности чередующихся знаков [8]. Численный эксперимент показал, что если в качестве начальных распределений выбирать эти зависимости, то на периферии вихря вновь появляется дополнительная зона завихренности со знаком, противоположным соседней. Это наводит на мысль, что, из-за неравномерной диффузии в центральной зоне вихря появляется избыток завихренности того или иного знака, который обуславливает генерацию, во время установления трехмерного течения, периферийной области завихренности.

В реальных течениях есть также радиальная и вертикальная компоненты скорости, которые, кстати, и генерируются. В работе [19] описаны результаты экспериментального изучения квазистационарного вихресток. И хотя масштабы вихревого течения в эксперименте имели несколько сантиметров, важным есть то, что диффузия завихренности от оси вихря компенсируется (баланс) конвекцией – стоком. Этот механизм также описан в известной монографии [20]. Согласно [19], вихрь состоит из трех областей, причем завихренность сконцентрирована у оси и на периферии, а внутри – течение практически потенциальное.

Ввиду только что сказанного, было проведен численный эксперимент для начального распределения в вихре с указанными свойствами. На рис. 3 представлены кривые зависимости для азимутальной скорости и завихренности. Как видно из рис. 3б, поле завихренности состоит из трех областей, причем зона противотечения отсутствует (см. рис. 3а). Численный эксперимент проводился для тех же значений амплитуд поля скорости и масштабов вихря. Тем не менее, поведение указанных полей отличается от обсуждавшихся выше. Теперь происходит диффузия внутренней вихревой области, на что указывают соответствующие кривые на рис. 3. Кривые с номером I – начальные распределения, с номерами II и III – в моменты безразмерного времени 1 и 2. Диффузия внешней – сводится практически на нет сгенерировавшимся, при установлении трехмерного течения, в периферийной зоне вихря полем радиальной компоненты скорости, направленной к оси (сток). На рис. 4 приведены вертикальные сечения $y=0$ (рис. 4а) и $x=0$ (рис. 4б) поля радиальной компоненты скорости, а также горизонтальные сечения, соответствующие глубинам 5м (рис. 4в), 50м (рис. 4г), и 90м (рис. 4д). Видно, что оно носит довольно сложный характер: азимутальная симметрия радиальной компоненты скорости отсутствует. На каждом горизонте вихрь имеет две пары областей – стока и источника. Но самое важное, что окружен он областью стокового течения, на что указывают отрицательные значения V_r во всех приведенных сечениях.

Важным в динамике геофизических вихрей является направление их вращения. Обсуждавшиеся выше результаты относятся к циклоническим вихрям. Численный эксперимент показал, что в случае антициклонического вращения вихрей приведенные выше различия слабо выражены. Возможно, планетарное вращение компенсирует каким-то образом диффузионный рост горизонтального размера вихря.

При ветровом воздействии типичным является то, что с подветренной стороны дрейфовое течение направлено, в целом, к центру вихря, то есть действует подобно стоку и компенсирует, как было указано выше, диффузию. С противоположной стороны вихрь несколько увеличивает свой размер. Симметрия вихря нарушается.

Поэтому, в случае слабого ветрового воздействия, можно лишь говорить о некой приближенной стационарности: хотя амплитуды поля скорости и завихренности уменьшаются во времени, его горизонтальный масштаб остается приближенно прежним.

Кроме указанных параметров, рассматривалась также переменная топография дна. Минимальная глубина задавалась 40 м, а максимальная 100 м. Параметр крутизны полагался $\alpha \approx 0.2$. Сравнение результатов случаем плоского дна показало на неплохую схожесть на горизонтах вдали от дна, что объясняется малым абсолютным наклоном. Поэтому они отдельно не приводятся. Естественно, что при перепадах глубины одного порядка с горизонтальным размером вихря, указанная схожесть вряд ли будет присутствовать

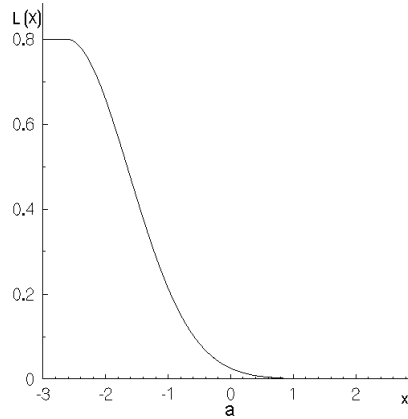
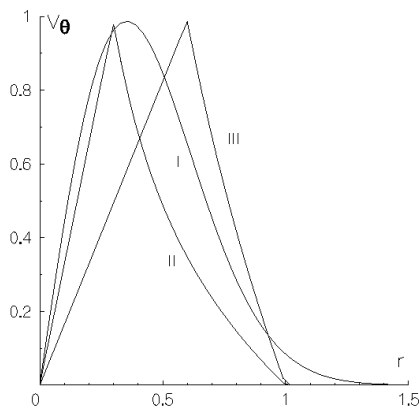
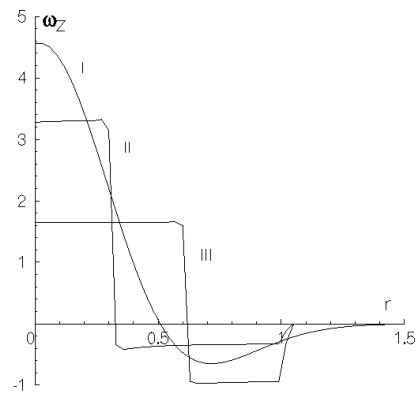


Рис. 1. Топография дна.



а)



б)

 $\Gamma)$ 

6)



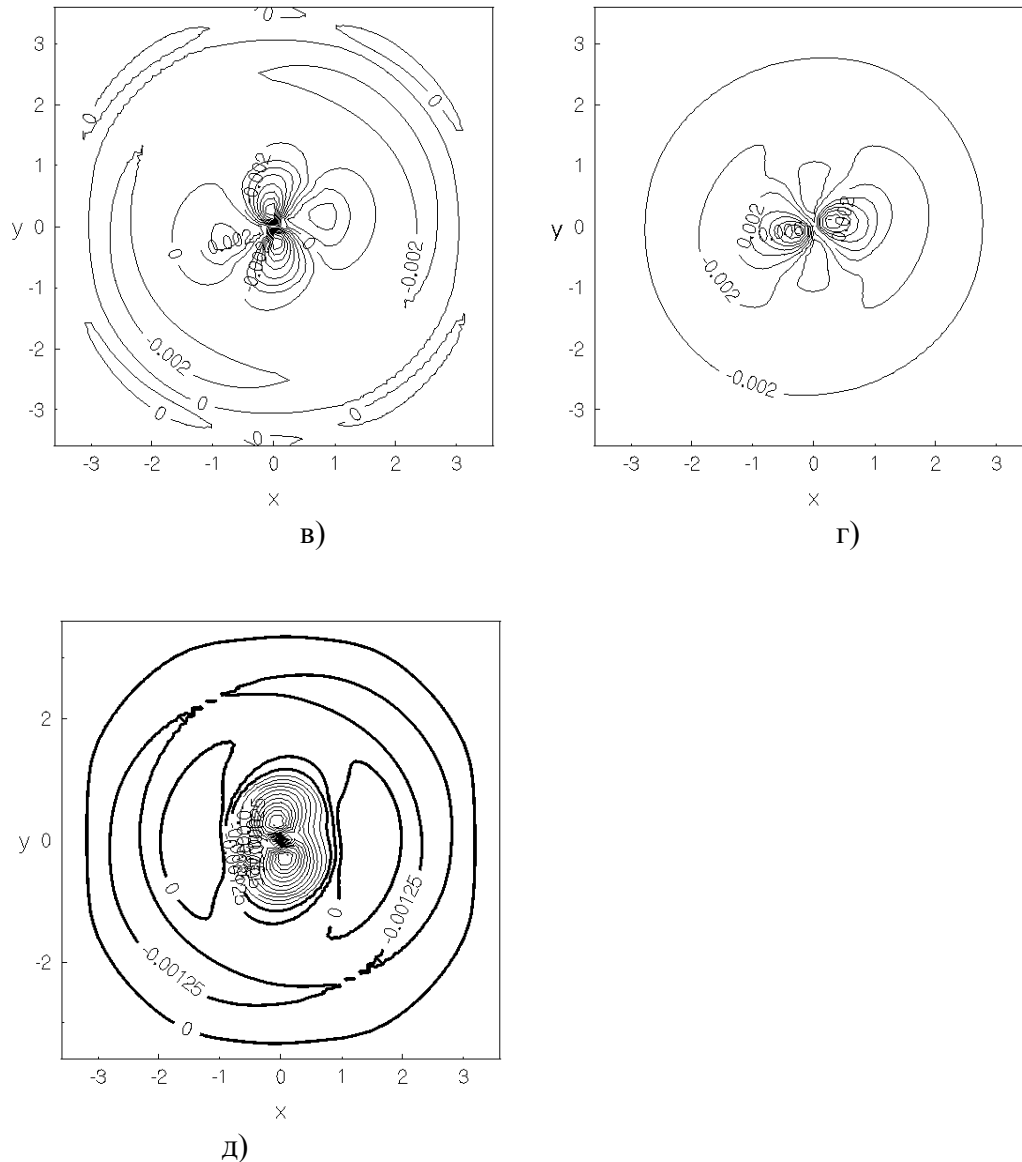


Рис. 4. Поле радиальной компоненты скорости компенсированного вихря, находящегося в диффузионно-конвективном балансе.

Выводы

Из всего сказанного выше, можно сделать следующие выводы. В качестве начальных горизонтальных распределений в компактном вихре можно использовать как автомодельное решение (аналог изолированного гауссиана), так и компактный компенсированный вихрь, состоящий из двух зон завихренности разных знаков. При этом, несмотря на различные размеры ядра компенсированного вихря (0,3 или 0,6), с течением времени довольно похожее распределение, состоящее из трех областей завихренности и появляется, хотя и слабо выраженная, внешняя область противотечения. Это и есть одна из форм когерентного состояния вихрей. Задание в начальный момент компактного компенсированного вихря, состоящего из трех зон с не равной нулю завихренностью, приводит, после установления трехмерного течения, к появлению добавочной (четвертой) зоны завихренности. Хотя также слабо выраженной.

Если структура в вихре такова, что между центральной и периферийной зонами завихренности разных знаков находится область потенциального течения, то генерируемое поле радиальной скорости может осуществлять диффузионно-конвективный баланс: вязкий диффузионный перенос завихренности компенсируется переносом к оси – стоком жидкости. Это – вторая возможная когерентная структура вихря, которую предпочтительнее использовать при моделировании ситуации с неизменным во времени радиальным размером вихря.

Антициклонический вихрь диффундирует в радиальном направлении значительно слабее – очевидно сказывается планетарное вращение. В целом все рассмотренные виды начальных распределений, включая направление вращения, при наличии ветрового воздействия очень слабо меняют свой горизонтальный масштаб, поэтому указанные выше различия существенны лишь на начальной стадии установления трехмерного течения при подстройке модели под данную ситуацию, в зависимости от того нужен лишь определенный рост начального горизонтального масштаба вихря или нет.

В качестве дальнейших исследований можно, на основании численных методов, рассматривать задачи устойчивости горизонтально и вертикально компенсированных вихрей – в продолжение работ [21,22]. Кроме этого, использовать модели эллиптических вихрей для случая сдвигового течения [23]. Имеет смысл также рассмотреть топографию дна с сильным наклоном: там горизонтальная симметрия компактного вихря серьезно нарушается и могут появиться новые физические эффекты.

Литература

1. Берестов А.Л. Уединенные волны Россби // Изв. АН СССР. ФАО. 1979. Т. 15 №6. С. 648-654.
2. Кизнер З.И. К интерпретации солитонных решений уравнения квазигеострофического вихря для бароклинного океана // Изв. АН СССР. ФАО. 1985. Т. 21. № 3. С. 330-332.
3. Кизнер З.И. Солитоны Россби с осесимметричными бароклиными модами // Океанология – 1976. – v. 16, № 6. – С.961–967.
4. Ларичев В.Д., Резник Г.М. О двумерных уединенных волнах Россби. // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. №5, С. – 1077-1079.
5. Stern M. E. Minimal properties of planetary eddies // J. Marine Res. – 1975. – v. 33, № 1. – P. 1-13.
6. Hogg N.G., Stommel H.M. } The heton, an elementary interaction between discrete baroclinic geophysical vortices? and its implementation concerning eddy heat flow
7. Flierl G.R., Stern M.E. and Whitehead J.A. The physical significance of modons: laboratory experiments and general integral constraints // Dynam. Atmos. Oceans – 1983. – v. 7 - P. 233-263.
8. Лукьянов П.В. Модели компактных компенсированных вихрей и их применение в задачах механики жидкости и газа // Прикладна гідромеханіка. 2011. №2. С. 37–43.
9. Baumert H.Z., Simpson J.H. and Sundermann J. Marine Turbulence: Theories, Observations and Models // Cambridge University Press, – 2011. – 630 p.
10. Лукьянов П.В. Взаимодействие двух вихрей в стратифицированном водоеме в условиях стационарного ветрового воздействия // Техническая механика. 2012, №3. С. 50-63.
11. Лукьянов П.В. Динамика компактного вихря в зоне прибрежного шельфа // Морской гидрофизический журнал. 2013, №1. С.21–33.
12. Белолипецкий В.М., Белолипецкий П.В. Численное моделирование ветровых течений в стратифицированных водоёмах. // Вычислительные технологии. 2006. № 5. С. 21–31.
13. Марчук Г.И. и др. Математические модели циркуляции в океане. М.: Наука, 1980. 391с.
14. Динамика океана / Под ред. Ю.П. Доронина. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 304 с.
15. Лукьянов П.В. Диффузия изолированного квазидвумерного вихря в слое устойчиво стратифицированной жидкости // Прикладна гідромеханіка. 2006. №3. С. 63 –77.
16. Соболев С.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 430с.
17. Adragna A., Salusti E. Observation of small scale shelf –trapped dipolar vortices near eastern Sicilian coast // J. Phys. Oceanogr. 1990. № 7. P. 1105-1112.

18. Арсеньев С.А., Губарь А.Ю., Николаевский В.Н. Самоорганизация торнадо и ураганов в атмосферных течениях с мезомасштабными вихрями // ДАН. 2004. №4. С. 541-546.
19. Рудяк В.Я., Савченко С.О. Моделирование закрученной затопленной струи, индуцируемой вихресток // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002, №4. С.139-149
20. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 693 с.
21. Козлов В.Ф., Макаров В.Г. Моделирование неустойчивости осесимметричных вихревых шнуров с помощью метода контурной динамики // Механика жидкости и газа . 1985. №1. С. 33-39.
22. Козлов В.Ф., Макаров В.Г., Соколовский М.А. Численная модель бароклинной неустойчивости осесимметричных вихрей в двухслойном океане // Известия АН СССР, Физика атмосферы и океана. 1986. №8. С. 868-874.
23. Rizer S.C., Owens W.B., Rossby H.T., Ebbesmeyer C.C. The Structure Dynamics and Origin of Small-Scale Lens of water in the Western North Atlantic Thermocline. // J.Phys. Oceanogr. 1986. № 3. P. 572–590.

Стаття надійшла 14.03.2014

Прийнято до друку 08.04.2014

Анотація

П.В. Лук'янов.

Залежність динаміки субмезомасштабного компактного вихора від його внутрішньої структури

Представлено результати досліджень динаміки компактного вихора від його внутрішньої структури. Виявлено тип вихорів, що мають таку горизонтальну структуру, при якій дифузійне зростання компенсує конвекцією (стік рідини), обумовлюючий квазістаціонарний стан течії. Горизонтальна структура вихра складається з трьох областей. Перша, доволі тонка (приблизно 10% від товщини) область, знаходиться біля вісі вихра. За нею слідує широка (приблизно 80% від товщини вихра) область із відсутністю завихреності (течія на зразок точкового вихра). Третя, зовнішня область вихра, таке є тонкою (приблизно 10% від товщини), але має завихреність протилежного знака тій, що у першій області. Величини вказаних завихреностей є такими, що у цілому вихор компенсований (сумарна завихреність дорівнює нулеві). Наведено порівняння із відомими теоретичними та експериментальними даними за цією тематикою.

Ключові слова: компактний вихор, внутрішня структура, дифузійно-конвективний баланс

Summary

P.V. Lukianov

The effect of internal structure on submesoscale vortex dynamics

The effect of compact vortex horizontal structure on vortex dynamics investigations results have been presented. It was found out the type of vortexes that have such the horizontal structure when horizontal vortex scale growth is compensated by convection (weak sink flow) that results into quasi-steady vortex state. The vortex horizontal structure consists of three domains. First one, a rather thin (some 10% of vortex thickness), that is near axis of vortex. It has the same sign of vorticity as vortex rotation. Then it follows a wide (some 80% of vortex thickness) domain of non-rotational flow (point-vortex like flow). The third (external) vortex domain is also thin (some 10% of vortex thickness) but it has opposite-sign vorticity to that in first domain. The values of the vorticities are such that the vortex is compensated (total vortex vorticity is equal to zero). The comparison with known similar theoretical and experimental data on the theme has been given.

Key words: compact vortex, internal structure, diffusive-convective balance.

УДК 533.63,534.23

Петр В. Лукьянов

ВЛИЯНИЕ ПРИСОЕДИНЕННОГО КОНЦЕВОГО ВИХРЯ ЛОПАСТИ РОТОРА ВЕРТОЛЁТА НА ГЕНЕРАЦИЮ BVI-ШУМА

В работе в трёхмерной нестационарной постановке, с учётом граничного условия на торцах лопасти ротора вертолёт, поставлена и решена задача генерации шума взаимодействия лопасти и вихрей (BVI-шум). Для её решения предварительно были получены выражения для компонент индуктивной скорости течения, генерируемого вихрём Скули, расположенным на внешнем конце вращающейся лопасти. Общая задача разделена на две части: аэродинамическую и акустическую. Аэродинамическая часть задачи представляет собой замкнутую систему уравнений Эйлера и неразрывности для баротропного газа. Акустическая часть задачи состоит из системы двух уравнений для звукового потенциала и пульсаций плотности. Обе части задачи решались численно с помощью численно-аналитического метода. Выполнен сравнительный анализ результатов численного расчёта данной задачи с аналогичной задачей без учёта концевых вихрей. В частности обнаружено, что наличие концевых вихрей в модели делает шум преимущественно шумом вихревого характера, поэтому ниже по уровню шума в отсутствие концевых вихрей. При этом характерная для него частота 700Гц выражена более отчётливо.

Ключевые слова: модель концевого вихря, генерация BVI-шума лопастью ротора вертолёт.

Введение

До сих пор моделирование шума взаимодействия лопасти вертолёт и вихря выполнялось с использованием разного рода приближений, не учитывающих присутствие на конце лопасти присоединённого вихря. Граничное условие на конце лопасти ($z = R$) не задавалось или же заменялось условием проскальзывания потока. И это оправдано для сравнительно больших значений чисел Маха ($M > 0.5$) и удлинённых лопастей: индуктивное течение попросту не успевает сформироваться, так как его сметает набегающий поток. Однако, если ставить задачу более корректно, то на конце лопасти нужно задавать несколько иное физическое граничное условие, поскольку там происходит зарождение присоединённого вихря.

Анализ существующей литературы в области вихревой динамики роторов вертолёт показал, что сегодня наиболее часто используемым приближением для моделирования скорости индуктивного вихревого течения на конце лопасти является формула Био-Савара-Лапласа [1]:

$$\vec{v} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \int \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{r^3} \quad (1)$$

В выражении (1) Γ - циркуляция скорости в вихре. На основе этой формулы получено выражение для компонент индуктивной скорости u, w в следующем виде:

$$u = -\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h}{y^2 + h^2}, \quad w = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{y}{y^2 + h^2} \quad (2)$$

Однако отметим, что формула (1) выведена для задачи в стационарной постановке. Следовательно, и выражения (2) отображают стационарный случай формирования индуктивного течения. Более того, как указано выше, в нестационарной

задаче это течение успевает сформироваться лишь вблизи конца лопасти: набегающий на лопасть поток, при достаточно больших скоростях, не позволяет замкнуть линии тока лопасти от её конца до комля (у оси вращения) в виду малого промежутка времени обтекания лопасти потоком. Отчётливое формирование вихря заметно лишь на конце лопасти. Нетрудно понять, что речь идёт о вихрях, индуцируемых в продольном направлении: скорость и траектория движения частиц жидкости расположены вдоль лопасти, а завихренность ($rot\vec{V}$) направлена вдоль по направлению набегающего на лопасть потока. Иначе говоря, это продольные вихри, формирующиеся в виде дорожки Кармана за лопастью вместе с уходящим потоком. Но эти вихри, как известно в акустике, имеют квадрупольную природу с малой энергией шума по сравнению с шумом, формирующимся непосредственно на поверхности лопасти.

Вернёмся, однако, к присоединённому вихрю, формирующемуся на конце лопасти. Экспериментальные исследования показали, что наиболее близкой математической моделью, описывающей присоединённый концевой вихрь, является модель Скулли [2]:

$$\gamma = \Gamma \cdot \frac{r^2}{r^2 + r_c^2} \quad (3).$$

Она уже использовалась для моделирования динамики ротора вертолѐта при изучении шума взаимодействия лопасти ротора и вихря [3].

Итак, будем полагать, что на конце лопасти формируется поперечный вихрь Скулли, индуцируемый течением вокруг концевой части лопасти. Его присутствие на конце лопасти восполнит недостающее граничное условие (по скоростям), которое теперь уже позволяет рассматривать задачу для конечной лопасти более корректно. Что же касается акустической части задачи, то более точный учѐт индуктивного течения в области конца лопасти даёт возможность изучить влияние концевого вихря на формирование шума взаимодействия лопасть-вихрь.

До сих пор речь шла об уточнении формулировки задачи аэродинамики на внешнем, удалѐнном от оси вращения, конце лопасти. Хотелось бы акцентировать внимание ещё на одном моменте. Вихрь Скулли не компактен: после достаточно быстрого достижения максимума на границе ядра вихря амплитуда окружной скорости в вихре плавно убывает на бесконечность. На противоположном же конце лопасти (у оси вращения ротора) формируется комлевой вихрь. Но он достаточно слаб и диффундирован, что позволяет использовать в первом приближении распределение убывающего вихря Скулли также и для описания комлевой завихренности. Действительно, ряд известных на сегодня некомпактных вихрей (например, вихри Рэнкина и Ватистасса) на удалении порядка $r_c = 4.0$ от центра вихря, которым вполне можно считать комлевую часть лопасти, имеют такое же, как и в вихре Скулли, распределение скорости. Потому для удалѐнной от центра вихря области любой из перечисленных вихрей, в том числе и вихрь Скулли, подходит для моделирования комлевой завихренности течения.

Предварительные расчѐтные соотношения

Приведенные выше выражения для компонент индуктивной скорости (2) получены для случая расположения вихря вдоль оси Ox при $y = 0$ [1]. Однако в задачах аэроакустики часто начало системы координат располагают у оси вращения лопасти, а не на её конце. Поэтому выведем соотношения для компонент скорости

v, w , считая, что концевой вихрь расположен при $y = R$, (рис.1). Используем тот же подход, что приведен у Джонсона при выводе (2).

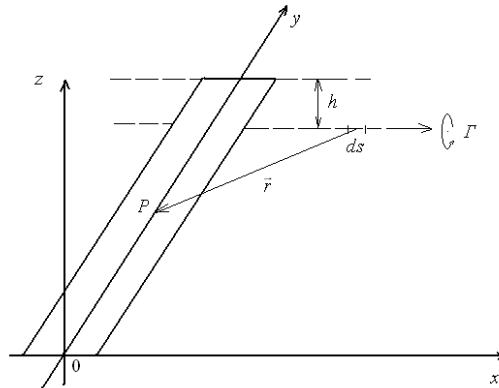


Рис.1. К выводу формул (4),(5).

Радиус-вектор произвольной точки P на поверхности лопасти в данной системе координат имеет следующий вид: $\vec{r} = -x\vec{i} - (R-y)\vec{j} + h\vec{k}$, где x, y – текущие координаты, h, R – расстояние от оси вихря до плоскости лопасти и радиус лопасти соответственно. Учитывая $d\vec{s} = \vec{i}dx$ [1], на основании формулы (1) получим выражение для вектора индуктивной скорости:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h\vec{j} + (R-y)\vec{k}}{(R-y)^2 + h^2}, \quad (4)$$

где, $w = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{R-y}{(R-y)^2 + h^2}$, $u = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h}{(R-y)^2 + h^2}$ – нормальная к поверхности лопасти и радиальная (вдоль размаха лопасти) компоненты скорости соответственно. Однако, в действительности среда вязкая, поэтому вихрь на самом деле имеет ненулевой конечный радиус r_c , который был учтен [2] в виде дополнительной добавки r_c^2 в знаменателе (3). На основании сказанного выражение для вектора индуктивной скорости (4) примет вид:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h\vec{j} + (R-y)\vec{k}}{(R-y)^2 + h^2 + r_c^2} \quad (5),$$

а

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{(R-y)\vec{k}}{(R-y)^2 + h^2 + r_c^2}, u = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h\vec{j}}{(R-y)^2 + h^2 + r_c^2}.$$

Таким образом, соотношения (5) описывают компоненты индуктивной скорости, которые используем в качестве не только граничного условия на конце лопасти $y = R$, но и для коррекции при численном расчёте нестационарных компонент полной скорости обтекания лопасти потоком.

Заметим, что при выводе выражений (4),(5) предполагалось, что расстояние от вихря до поверхности лопасти h везде одинаковое, то есть фактически лопасть считалась достаточно тонкой и её толщиной пренебрегли. Если же необходимо учесть

форму поперечного сечения лопасти, то есть изменение расстояния до лопасти с учётом её искривления $h = h(x)$, то везде нужно значения h заменить на выражение $h(x)$. Однако, в таком случае скорость из выражения (1) аналитически не всегда можно выразить, поскольку для этого требуется вычислить следующий интеграл:

$$\bar{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x)\bar{j} + (R-y)\bar{k}}{(R-y)^2 + h^2(x) + r_c^2} dx \quad (6)$$

Ввиду того, что модель представления концевой вихря вихрём Скулли также является приближённой, принятой на основании близкого совпадения её с экспериментальными данными, вариацию $h(x)$ при расчёте индуктивной скорости в данной работе не будем принимать во внимание, поскольку лопасть тонкая. При этом на основании формулы (6) в знаменателе получим точность второго порядка малости, а в числителе – первого порядка малости. Таким образом, поперечная к лопасти компонента скорости w , непосредственно ответственная за генерацию звука взаимодействия лопасти с потоком, вычисляется с точностью до величины второго порядка малости. Продольная же компонента скорости u вдоль размаха лопасти при этом будет определяться с точностью до величины первого порядка малости – разности расстояния от поверхности лопасти до её хорды. Такое приближение допустимо, поскольку в продольном направлении звук при взаимодействии лопасти и потока не генерируется, так как частицы воздуха в рамках рассматриваемой в данной работе модели идеальной сжимаемой среды просто скользят без трения вдоль лопасти. Распространению же звуковой волны, генерируемой в поперечном направлении, ничего не мешает во всех направлениях, в том числе и продольном направлении. Если всё же в будущем окажется принципиально важным учёт вариации формы конца лопасти, тогда придется воспользоваться выражением (6).

Постановка задачи

Пусть имеется лопасть прямоугольной формы вдоль размаха, параболической формы в поперечном сечении (рис.2). На внешнем от оси вращения конце ($z = R$) лопасти расположен присоединённый вихрь Скулли, распределение поля скорости которого захватывает и ближний к оси вращения конец лопасти $z = 0$. На переднюю кромку лопасти набегают поток из бесконечности со скоростью U . Необходимо выполнить расчёт компонент поля скорости и плотности, на основании которых произвести расчёт шума, генерируемого взаимодействием лопасть-вихрь.

Аэродинамическая часть

Система уравнений, описывающая течение идеальной сжимаемой жидкости вокруг лопасти, в безразмерной форме имеет следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \lambda c v' \frac{\partial u'}{\partial \eta} + \frac{c}{AR} w' \frac{\partial u'}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{M^2 \rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial v'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial v'}{\partial \xi} + \lambda c v' \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{1}{AR} w' \frac{\partial v'}{\partial \zeta} &= -\frac{\lambda c}{M^2 \rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial \eta}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial w'}{\partial \xi} + \lambda c v' \frac{\partial w'}{\partial \eta} + \frac{1}{AR} w' \frac{\partial w'}{\partial \zeta} = - \frac{1}{M^2 AR \rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial \zeta};$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho' u')}{\partial \xi} + \lambda c \frac{\partial(\rho' v')}{\partial \eta} + \frac{1}{AR} \frac{\partial(\rho' w')}{\partial \zeta} = 0;$$

где $\xi = x/c, \eta = y/\lambda, \zeta = z/R, \tau = kt, u' = u/U_\infty, v' = v/U_\infty, w' = w/U_\infty;$

$p = p' \rho_\infty U_\infty^2, \rho = \rho_\infty \rho', c, \lambda, R$ - длина хорды лопасти, толщинный параметр, радиус лопасти соответственно, M - число Маха, $AR = R/c$ ("aspect ratio").

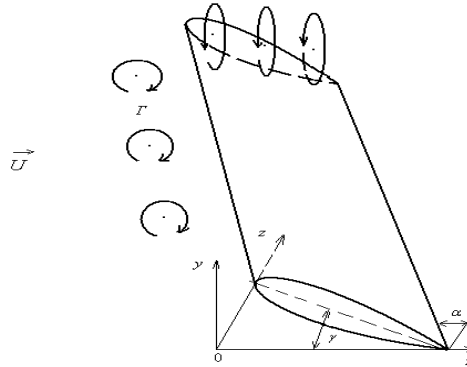


Рис.2. Обтекание лопасти потоком с учётом концевых вихря.

Первые три уравнения системы (7) представляют собой уравнения движения идеальной сжимаемой жидкости Эйлера без учёта массовых сил. Четвёртое уравнение – уравнение неразрывности среды.

Лопасть считается жёсткой, недеформируемой, а на её поверхности задаётся граничное условие непроницаемости:

$$\bar{V}_n|_\Gamma = 0 \quad (8)$$

Акустическая часть

Для формулировки аэродинамической части задачи нам необходимо знать параметры течения. После определения компонент скорости и плотности, в результате решения задачи аэродинамики (7)-(8), можно сформулировать следующую акустическую задачу [4]:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \tau^2} - \frac{1}{M_\infty^2} \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \xi^2} - a^2 (\lambda^2 c^2 \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \eta^2} + \frac{1}{AR^2} \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \zeta^2}) + R(\bar{p}', \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \eta}, \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \zeta}, \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \eta \partial \xi}, \dots, \frac{\partial^2 \bar{p}'}{\partial \zeta^2}) =$$

$$\gamma (\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \zeta}, \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \eta \partial \xi}, \dots, \frac{\partial^3 \bar{\varphi}}{\partial \xi^3});$$

а,

$$\bar{\rho} (\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi^2} + c^2 \lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{AR^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \zeta^2}) + c \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi} + c^2 \lambda^2 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta} + \frac{1}{AR^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \zeta} = - \left[c \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + \right. \quad (10)$$

$$\left. \bar{\rho} (c \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \lambda c^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{c^2}{R} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta}) + c \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial \xi} + \lambda c^2 \bar{v} \frac{\partial \rho'}{\partial \eta} + \frac{c^2}{R} \bar{w} \frac{\partial \rho'}{\partial \zeta} \right]$$

где $\bar{\varphi}, \bar{\rho}'$ - безразмерный звуковой потенциал и плотность. Выражение $R(\bar{\rho}', \frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial \eta}, \frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial \zeta}, \frac{\partial^2 \bar{\rho}'}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \bar{\rho}'}{\partial \eta \partial \xi}, \dots, \frac{\partial^3 \bar{\rho}'}{\partial \zeta^2})$ содержит в себе остальные слагаемые, зависящие от $\bar{\rho}'$ и её производных. Левая часть уравнения (9) представляет собой оператор, описывающий процесс возникновения и распространения звука. Правая же часть уравнения (9) представляет собой источник звука, являющийся функцией звукового потенциала $\bar{\varphi}$ и его производных.

Поскольку звук генерируется внутри основного течения, то есть не является результатом активного излучения, то звуковая составляющая течения удовлетворяет граничному условию непроницаемости через поверхность в составе полной скорости течения. Полагаем, что в начальный момент времени, до взаимодействия потока с лопастью, звуковые возмущения течения отсутствуют. Таким образом, сформулирована задача генерации звука потоком.

Метод решения задачи

Поставленные задачи (7)-(8) и (9)-(10) содержат уравнения в частных производных, не имеющие аналитического решения. Поэтому для решения данных задач использовался численно - аналитический метод, предназначенный для решения подобного рода задач. Более того, чем больше слагаемых в решаемом уравнении, тем расчётная матрица более наполнена, неразряженная, что даёт возможность устойчивого счёта. В качестве расчётной использовалась 15-точечная схема, которая уже была ранее хорошо изучена для пространственной нестационарной задачи генерации звука в потенциальном приближении [5,7].

Ближнее поле

В качестве характеристики ближнего звукового поля рассмотрим безразмерные пульсации плотности $\bar{\rho}'$ на поверхности лопасти. Они определяют зоны наиболее интенсивной генерации звука и области относительного спокойствия – слабой генерации звука.

Для численного расчета взята тестовая лопасть, параболической формы $y = x(1-x)$ в поперечном сечении и прямоугольной формы вдоль её размаха. При этом $AR=10, c=0,3m$, числа Маха $M=0,2; 0,4$. Угол постановки лопасти в плоскости вращения выбирался $\alpha=30^\circ, 60^\circ$, а угол атаки по отношению к встречному потоку составлял $\alpha=5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$.

Обращают на себя внимание определённые закономерности распределения $\bar{\rho}'$ (рис.3). На поверхности лопасти присутствуют две области повышенной генерации звука, представляющие собой две серии отчётливо выраженных пиков $\bar{\rho}'$. Эти области уже были замечены ранее при решении других задач генерации звука вращающейся лопастью [4,6,8]. Как ранее было установлено, первая из областей генерации звука определяет шум вращения лопасти, который имеет дипольную природу. Вторая серия пиков, расположенная по центру лопасти, описывает переходной процесс преобразования энергии шума вращения в вихревой BVI-шум. Поскольку в рассматриваемой в данной работе задаче произведён учёт граничного условия на концах лопасти, чего не было ранее сделано для системы уравнений (8)-(9), то полученные расчётные данные имеют определённое различие (равно как и сходство в отдельных расчётных случаях) от данных работы [8]. Так различие в распределении

$\bar{\rho}'$ наблюдается при малых углах атаки $\gamma = 5^\circ$ и числе Маха $M = 0,2$ во второй серии пиков. Если ранее, без учёта концевго вихря, во второй серии пики были выражены резче, имели треугольную форму, то здесь уже они стали плавней – в виде трапеции.

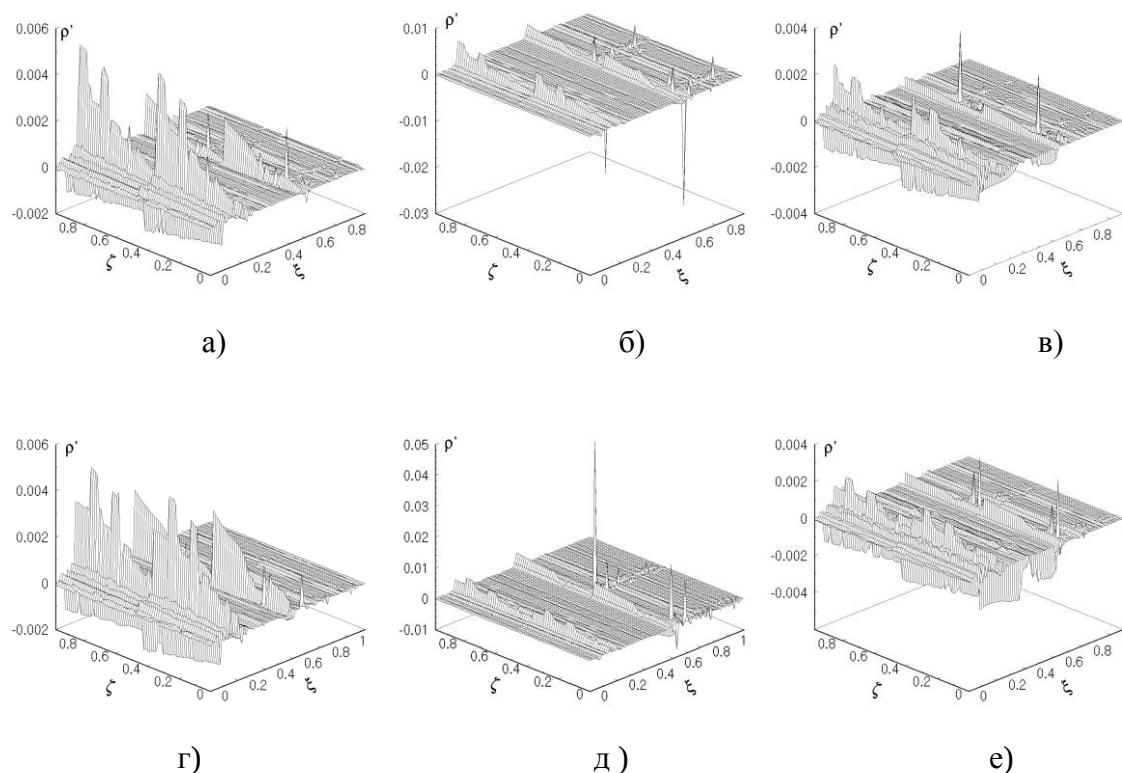
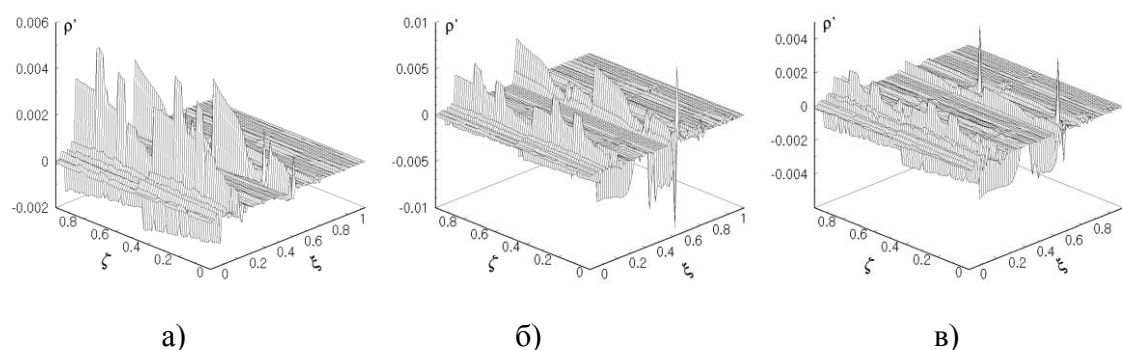
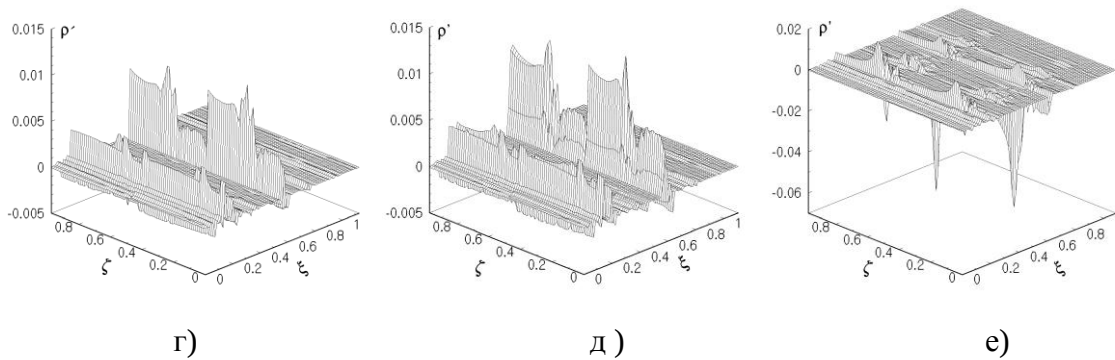


Рис.3 Распределение пульсаций плотности для $M = 0,2$.

Для угла атаки $\gamma = 10^\circ$ обе серии пиков блики друг к другу. И лишь два следа после второй зоны пиков, зоны неустойчивости, различны: в задаче с учётом концевго вихря Скулли они более сглажены, а в задаче без учёта концевго вихря наблюдается повышенная неустойчивость в 2-х следах перед сходом потока с поверхности лопасти. Это потому, что концевой вихрь оказывает определённое влияние на зоны устойчивости течения.



Рис.4 Распределение пульсаций плотности для $M = 0.4$.

Для случаев $M = 0,2; \alpha = 60^\circ$ и $M = 0,4; \alpha = 30^\circ$ распределения плотности $\bar{\rho}'$ качественно похожи, за исключением лишь незначительных количественных различий. Однако, в случае $M = 0,4; \alpha = 60^\circ$ картина распределения $\bar{\rho}'$ отличается от случая без учёта концевых вихря. Так, если ранее в данной расчётной ситуации указанные две зоны генерации звука были вырождены в 4 пика [8], то в рассматриваемой в данной работе задаче первая зона генерации звука достаточно плавная. Вторая зона, здесь уже преобладающая по уровню над первой зоной пиков, также имеет распределение пиков плавней: два локально выраженных пика уже не столь доминируют над общим уровнем второй зоны.

Указанные различия ещё раз говорят о том, что учёт концевых вихря при моделировании генерации шума вращения лопасти делает численное решение плавным, близким к реальной ситуации.

Дальнее поле

Наиболее важной характеристикой, отображающей процесс генерации звука, есть уровень звукового давления L (по отношению к $2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$). Эту величину рассчитывают на основе интегрального представления дальнего поля:

$$-M_1^2 \int_s \left[\frac{F}{R} \right]_{t^*} dS_x + \int_s \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{1}{Ra_\infty} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial(1/R)}{\partial n} \right]_{t^*} dS = 4\pi\varphi(x, t_1),$$

где $F = \rho[(\nabla\varphi \cdot \nabla)\bar{v} + (\bar{v} \cdot \nabla) \cdot \nabla\varphi] + \rho'(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v} + \bar{v} \cdot \text{div}(\rho\nabla\varphi + \rho'\bar{v}) + \nabla\varphi \text{div}(\rho\bar{v})$, которое включает в себя не только $\bar{\rho}'$, но и её производные. Это позволяет в большей степени учесть особенности процесса генерации звука на поверхности лопасти. Анализ результатов расчёта решённой задачи даёт возможность провести сравнение полученных данных с задачей без учёта концевых эффектов [8]. В случае $M = 0,2; \alpha = 30^\circ, \gamma = 5^\circ$ максимальный уровень шума составил порядка 82Дб в обеих задачах. Однако с учётом концевых вихря общий перепад уровня давления больше на 10Дб: 82-45Дб, а в задаче без учёта концевых вихря составил 82-55Дб и форма поверхности L в целом более плавная, а с учётом вихря - наблюдается провал L в комлевой зоне до 45Дб.

В случае $M = 0,2; \gamma = 10^\circ$ форма поверхности L в обеих задачах практически одинакова, а вот уровень в задаче без учёта концевых вихрей в целом по всей

поверхности лопасти выше на 8Дб. Это ещё раз говорит о том, что присутствие в значительной мере завихренности в течении трансформирует часть энергии шума вращения в вихревой шум с более низким уровнем. Эта же тенденция наблюдается и для угла атаки $\gamma = 15^\circ$, где дополнительно в области комлевой части ($z = 0$) лопасти заметно существенное снижение шума до 30Дб. В то же время в решённой ранее задаче без учёта вихря [8] уровень шума составлял порядка 42Дб. При этом максимальный уровень шума отличался на 5Дб, а минимальный на 12Дб. Это ещё раз подтверждает выявленный ранее факт: при малых скоростях (комлевая часть лопасти) вихревая составляющая течения существенно влияет на трансформацию энергии потока в вихревой шум. С увеличением скорости течения (на внешнем конце лопасти) это влияние снижается.

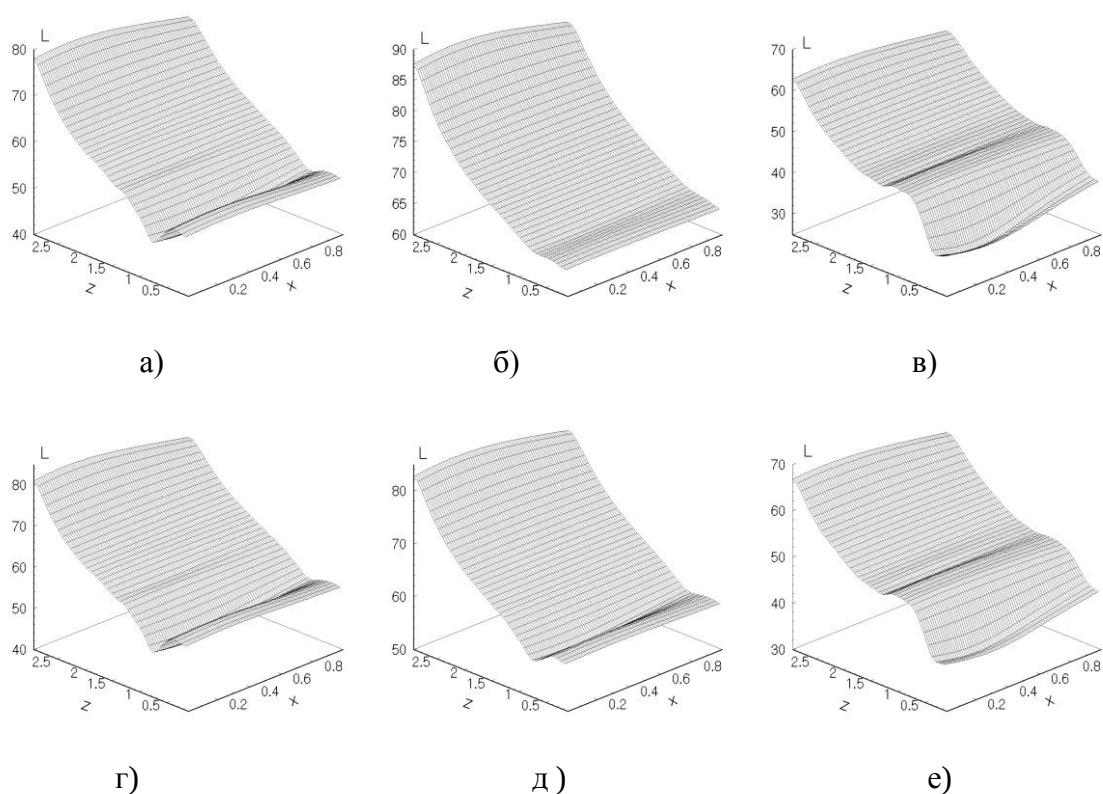
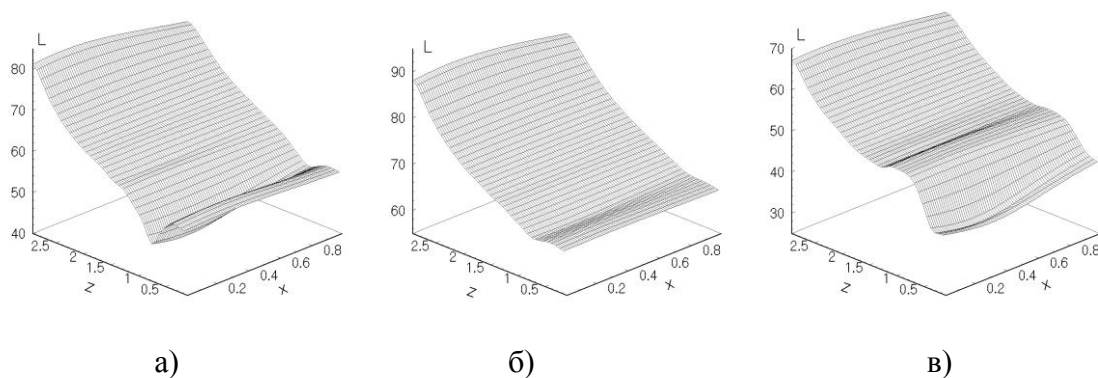
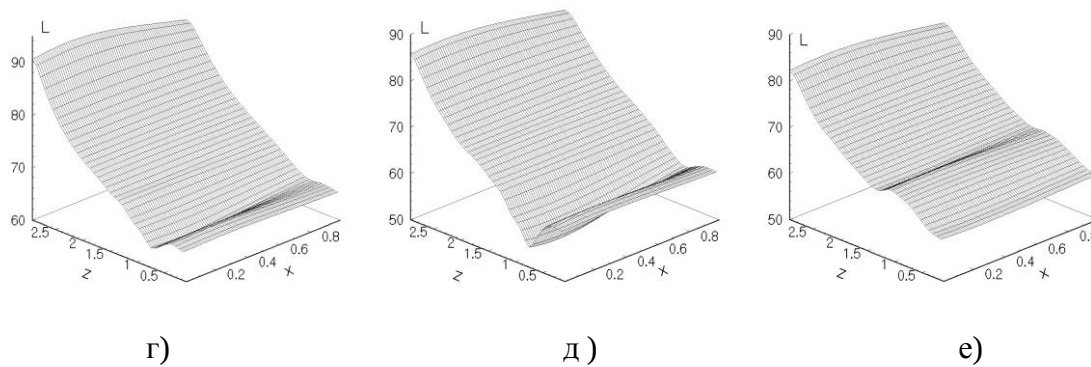


Рис.5. Уровень нормированного звукового давления $M = 0,2$



Рис.6. Уровень нормированного звукового давления $M = 0,4$

Для угла постановки лопасти к потоку $\alpha = 60^\circ$ качественная картина остаётся той же, а вот количественные различия присутствуют. Здесь лишь для угла атаки $\gamma = 10^\circ$ уровень L на 5Дб ниже чем в задаче без учёта концевых эффектов. Для углов атаки $\gamma = 5^\circ; 15^\circ$ максимальный уровень L практически одинаков, а вот минимальный уровень отличается примерно на 10Дб.

С увеличением скорости набегающего потока $M = 0,4$ качественные различия, описанные для случая $M = 0,2$, те же. Количественно лишь для некоторых ситуаций ($\gamma = 10^\circ$) уровень шума выше без учёта вихря, чем в рассматриваемой в данной работе задаче. Отличительной особенностью обладает случай $\alpha = 60^\circ; \gamma = 10^\circ$ и $\alpha = 60^\circ; \gamma = 15^\circ$. Так при $\gamma = 10^\circ$ уровень шума без учёта концевого вихря достигает 102Дб, в то время как с учётом концевого вихря составил лишь 90Дб. Однако для близкого к критическому углу атаки $\gamma = 15^\circ$, наоборот, с учётом концевого вихря максимальный уровень L составляет 83Дб, а без учёта – всего 73Дб. Это значит, что на окончательную картину генерации шума одновременно влияют все перечисленные выше параметры – число Маха, угол атаки лопасти и угол постановки её к встречному потоку. Причём это влияние, как показал выше изложенный анализ, для разных комбинаций параметров различное.

Что же касается частотного спектра генерируемого шума, то он отражает описанные выше различия L . В тех случаях, где поверхность L генерируемого шума плавней, огибающая в частотном спектре шума также плавная. Значительные перепады уровня шума в комлевой части также отразились в виде впадин огибающей частотного спектра. Вихревая составляющая шума, обнаруженная в районе 700Гц, в рассматриваемой в данной работе задаче более чётко выражена во всех описанных выше расчётных ситуациях, чем в задаче без учёта концевых вихрей. Описанные выше расчётные данные согласуются с теоретическими и экспериментальными данными подобного рода задач [9,10].

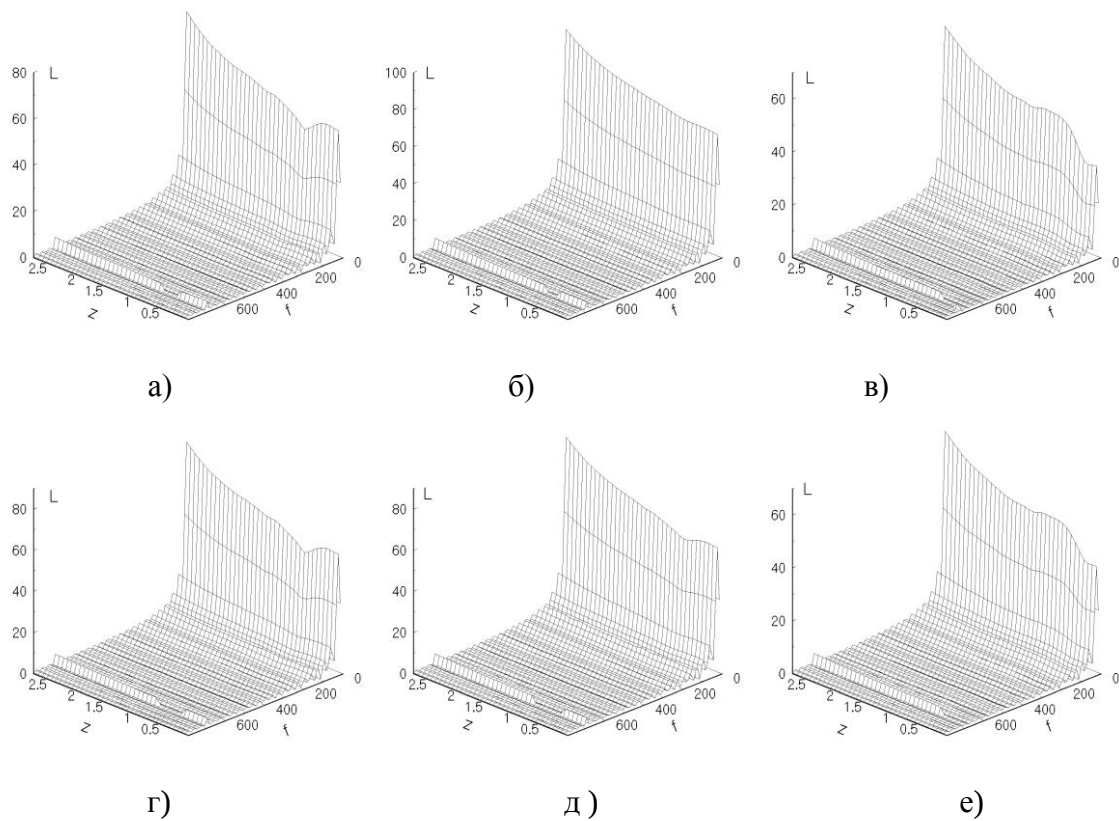


Рис.7 Спектр генерируемого шума $M = 0,2$

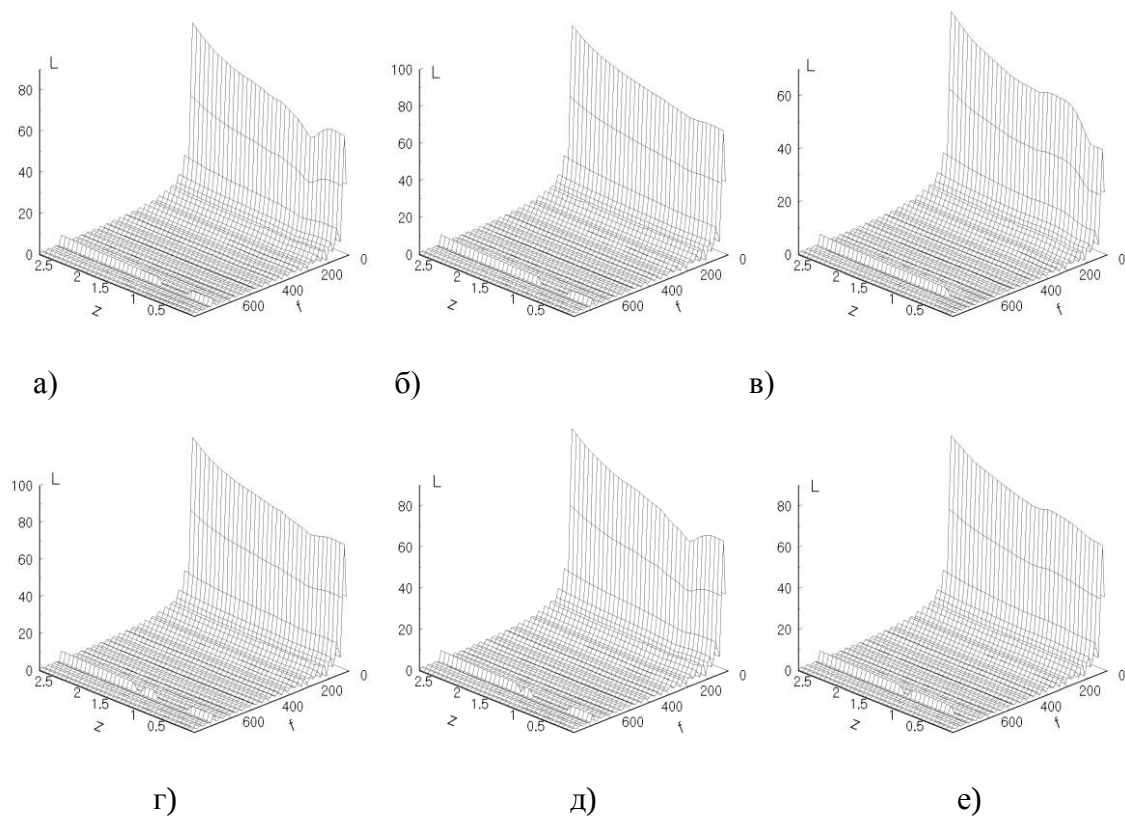


Рис.8 Спектр генерируемого шума $M = 0,4$

Выводы

1. Получены представления компонент индуктивного поля скорости в присоединённом вихре, ядро которого расположено на удалённом от оси вращения конце лопасти.
2. Поставлена и численно решена задача генерации BVI-шума лопастью ротора вертолѐта, учитывающая присоединѐнный концевой вихрь Скулли, генерируемое им распределение поле индуктивных скоростей вдоль по размаху лопасти.
3. Выполнен сравнительный анализ полученных расчётных данных с задачей без учёта концевого вихря на торцах лопасти. В частности обнаружено, что зоны генерации звука (возмущения плотности) в ближнем поле расположены в том же месте, где и в задаче без учёта концевого вихря. Однако пики $\bar{p}'$ заметно плавней. Этот факт сказался и на распределении уровня давления в дальнем поле. Общий уровень давления L в задаче с учётом концевого вихря в ряде расчётных случаев ниже, чем без учёта его.

Литература

1. Джонсон У. Теория вертолѐта: В 2-х книгах. / Джонсон У. – М.: "Мир", 1983, т.1, 2-1024с.
2. Scully M.P. Computation of Helicopter Rotor Wake Geometry and Its Influence on Rotor Harmonic Airloads. / Scully M.P.// Massachusetts Institute of Technology, ASPL TR 178-1, March 1975.
3. Alasdair Thom and Karthikeyan Duraisamy. High-Resolution Simulation of Parallel Blade-Vortex Interactions. / Alasdair Thom and Karthikeyan Duraisamy.// AIAA Journal. 2010, v.48, No10, p.2313-2324.
4. Лук'янов Петро В. Генерація звуку взаємодії вихорів Тейлора і Скуллі з лопаттю змінної товщини. // Лук'янов Петро В. // Наукові вісті НТУ „КПІ”. Сер.: фіз.-мат. науки, 2014, №4. С.139-145.
5. Лукьянов П.В. Об одном численно-аналитическом подходе к решению задачи генерации звука тонким крылом. Часть II. Схема применения для нестационарных задач. // Лукьянов Петро В. / Акустичний вісник. - 2012-№3(15). - С.45-52.
6. Лук'янов Петро В. Шум взаємодії вихору і лопаті гелікоптера. // Лукьянов Петро В. / Наукові вісті НТУ „КПІ”. Сер.: фіз.-мат. науки, 2013, №4. С.132-136.
7. Пётр В. Лукьянов. Математическое моделирование BVI-шума лопасти вертолѐта при её наклонной обдувке. // Пётр В. Лукьянов. / Вісник Черкаського Університету. Серія Прикладна математика. Інформатика, №18(271), 2013. С.:11-20.
8. Лукьянов П.В. Влияние угла атаки лопасти на генерацию шума взаимодействия вихрей и ротора вертолѐта. // Лукьянов П.В. / Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. №3, 2014. С.:45-58.
9. Gallman J.M. Parametric Computational Study of Isolated Blade-Vortex Interaction Noise. / Gallman J.M. // AIAA Journal. 1994. Vol.32. №2. P.232-238.
10. Гольдштейн М.Е. Аэроакустика. / Гольдштейн М.Е. - М.: Машиностроение, 1981. 296с.

Стаття надійшла 20.03.2014
Прийнято до друку 08.04.2014

Анотація

Петро В. Лук'янов
Вплив приєднаного прикінцевого вихору лопаті ротора гелікоптера на генерацію BVI-шуму

В роботі в трьохвимірній нестационарній постановці, з урахуванням граничної умови на торцях лопаті ротора гелікоптера, поставлено та розв'язано задачу генерації шуму взаємодії лопаті і вихорів (BVI-шум). Для її розв'язання попередньо було отримано вирази компонент індуктивної швидкості течії, що генерується вихором Скуллі, який розташований на зовнішньому кінці лопаті, що обертається. Загальна задача розділена на дві частини:

аеродинамічну та акустичну. Аеродинамічна частина задачі являє собою замкнену систему рівнянь Ейлера та нерозривності для баротропного газу. Акустична частина задачі складається з системи двох рівнянь для звукового потенціалу та пульсацій густини. Обидві частини задачі розв'язано чисельно за допомогою чисельно-аналітичного методу. Виконано порівняльний аналіз результатів числового розрахунку даної задачі з аналогічною задачею без урахування кінцевих вихорів. Зокрема виявлено, що наявність кінцевих вихорів в моделі робить шум переважно шумом вихрового характеру, тому нижче за рівнем шуму в відсутності кінцевих вихорів. При цьому характерна для нього частота 700Гц виражена більш чітко.

Ключові слова: *модель прикінцевого вихору, генерація BVI-шуму лопаттю ротора гелікоптера.*

Summary

Petro V. Lukianov

Influence of the helicopter's rotor blade tip bound vortex on BVI-noise generation

In this paper three-dimensional non-stationary problem, with helicopter's blade tip boundary condition taking into account, of the blade-vortex interaction (BVI) sound generation has been set and solved. For it solving formulas for components of the inductive velocity have been deduced for Scully's vortex distribution which is situated at the external tip of rotating blade. General problem is shared in two parts: aerodynamics and acoustics problems. Aerodynamics problems corresponds a closed system of Euler's equation and continuity equation for barotropic gas. Acoustical part is consisted of system of two equations for sound potential and density pulsations. Both parts of general problem has been numerically solved by means of numerically analytical method. A comparative analysis of the numerical calculations has been carried out for the two situations – with- and without tip vortex present. In particular it has been manifested that tip vortex presentation in the model make noise mainly vortex type. Its level is lower that noise without tip vortex and individual frequency 700Hz is seen more clearly.

Key words: *model bound vortex, BVI-noise generation by helicopter's rotor blade.*

УДК 004.934.2+621.395

А.Ю.Небилиця

ОПТИМІЗАЦІЯ МЕТОДУ ВИДІЛЕННЯ МІНІМАЛЬНИХ СЕГМЕНТІВ МОВНОГО ПОТОКУ

Набув подальшого розвитку метод амплітудно-інтервальної локалізації сегментів основного тону. Доведена ефективність використання оцінки амплітуд коливання за різницевою схемою із розширеним базисом в задачах попередньої обробки акустичних даних. Визначено критеріальні оцінки виділення головної пелюстки, базовий алгоритм, спосіб верифікації процесу локалізації.

Ключові слова: мовний потік, основний тон, розпізнавання мови, амплітудно-інтервальна селекція, метод нулів сигналу, різницева схема.

Вступ

Взаємодія з технічними пристроями і системами природнім для людини шляхом – обміном мовними повідомленнями – дозволяє досягти оперативності та гнучкості комунікації, усуває потребу постійного візуального контакту та виконання тактильних дій, надає додаткову зручність для людей з вадами зору. Такі переваги зумовили тривалі та інтенсивні пошуки методів автоматизованого розпізнавання і синтезу мови, але задача отримання повноцінного мовного інтерфейсу і на сьогодні не розв’язана [1]. Головною перешкодою залишається низька достовірність машинної ідентифікації мови, яка проявляється в сильній залежності від індивідуальних ознак, інтонації та темпу мовлення, чутливості до шуму. Стримуючим фактором у реалізації мовного інтерфейсу, особливо для вбудованих систем, є складність процесів попередньої обробки звукових даних, що зумовлює значні затрати обчислювальної потужності. Вирішення цих проблем, в межах даної роботи, вбачається в удосконаленні сегментації мовного потоку з врахуванням особливості акустичного сигналу. Найбільш вираженою ознакою мовлення є періодичність пульсації голосових зв’язок, яку прийнято називати основним тоном (ОТ). Важливість визначення ОТ засвідчує значна кількість отриманих методів, які узагальнені в [2]. Однак, всі вони не забезпечують поєднання таких показників як простота, достовірність та точність локалізації.

Виходячи із зазначеного, *метою досліджень* є оптимізація виділення сегментів ОТ за критерієм мінімізації цифрової обробки на базі «легких» машинних інструкцій. *Актуальність роботи* полягає у виявленні нових підходів попередньої обробки звукових даних для розв’язання задач ідентифікації мовних образів. *Об’єктом досліджень* є методи цифрової обробки мовних сигналів. *Предметом дослідження* є методи виділення ділянок основного тону із потоку звукових даних.

Постановка задачі

Оптимізація процесу виділення сегменту ОТ передбачає:

- досягнення мінімізації затрат обчислювальної потужності та збоїв у вигляді виділення хибних та пропуску головних пелюсток сегменту;
- здійснення верифікації процесу;
- забезпечення точності і стабільності методу шляхом адаптації до виду звукових даних та шумів, інваріантності щодо способу отримання вибірки, надійності ініціалізації.

Власне, сама задача розробки методу полягає в отриманні способу сегментації вокалізованих ділянок мовного потоку за ознаками основного тону, встановлення меж

застосування та визначенні виду налаштувань, які забезпечують відповідність зазначеним вимогам.

Теоретичні основи методу

В своїй основі метод базується на частотних характеристиках мовного потоку та параметрах його дискретизації. На даний час, більшістю розробників систем розпізнавання мови вважається доцільно обмежувати частотний спектр мовного сигналу смугою 80..6000 Гц (більш широкою, ніж в телефонії), а частоту дискретизації f_{clk} вибирати в межах 12..16 кГц [3]. Враховуючи, що нижня межа спектру основного тону f_p для чоловічого голосу становить 80 Гц, то мінімальна довжина вибірки сегменту основного тону N не буде перевищувати 200 семплів. Однак, зважаючи на вимогу здійснення швидкого спектрального перетворення, слід прийняти $N=256$. Найбільш поширеною, на сьогодні, є чотирьохформантна модель мови [4; 5]. Згідно цієї моделі умовно виділяють такі частотні діапазони, у Гц:

$$F_1 \in [470; 920], F_2 \in [800; 2070], F_3 \in [2660; 3500] \text{ та } F_4 \in [3540; 4000].$$

Найбільша щільність енергії припадає на першу форманту, тому вона є більш вираженою в мовному сигналі, що демонструє пелюстка п. 1 на рис.1. Кількість точок вибірки, які припадають на позитивний фронт пелюстки, визначаються як $n = f_{clk} / (4 \cdot F_1)$. Виходячи із встановленої частоти дискретизації $n \in [3; 8]$, такий широкий діапазон не складає перешкод у використанні, оскільки реальна ширина фронту пелюстки завжди може бути уточнена.

Прототипом способу локалізації основного тону вибрано метод Рабінера-Голда [6], в якому визначення меж сегменту проводять шляхом знаходження мінімумів та максимумів сигналу, а також враховують часові інтервали між ними. Даний метод простий у реалізації, але дуже чутливий до шумів, тому його використання можливе лише за умови проведення низькочастотної фільтрації. Згідно мети досліджень, саме усунення процесу цифрової фільтрації є первинною вимогою оптимізації.

Ідея покращення методу виділення ділянок основного тону полягає у заміні амплітудних параметрів коливань на їх оцінку, в якості якої вибрано швидкість наростання сигналу. Допустимість такої заміни ґрунтується на однозначності зв'язку між миттєвим значенням коливань $y(t) = A_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$ та швидкістю змін сигналу $dy(t)/dt = \omega \cdot A_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$. Такий зв'язок для одномодового випадку дозволяє визначити амплітуду коливань A_m із швидкості наростання сигналу в моменту часу, коли $y(t_i) \approx 0$. За цих умов має місце рівність $dy(t)/dt = \omega \cdot A_m = 2 \cdot \pi \cdot A_m / T_0$, де T_0 – період коливання. У випадку аналізу даних з постійним часом дискретизації $dt = 1 / f_{clk}$ похідну можливо замінити різницевою схемою $(y_i - y_{i-1}) \cdot f_{clk} = 2 \cdot \pi \cdot A_m / T_0$. Звідкіля, привівши нормалізацію часу, отримано:

$$A_m = (y_i - y_{i-1}) \cdot T_0^* / (2 \cdot \pi). \quad (1)$$

Акустичний сигнал мовного потоку полімодовий, більш того, він багатий на високочастотні складові та шум. Враховуючи дані обставини, пропонується розв'язок стосовно виділення сегменту ОТ здійснювати не шляхом співставлення абсолютних значень A_m , а їх оцінкою A_j^* , де j індекс пелюстки коливань в межах ділянки аналізу.

Вираз (1) можливо трактувати наступним чином: чисельник являє собою оцінку амплітуди, а знаменник виконує функцію корекції. Є очевидним, що еквівалентом операції множення при оцінці амплітуди може бути вираз, отриманий шляхом розширення базису $b \leq 2 \cdot (n+1)$:

$$A_j^* = y_{q+m} - y_{q-l}, \quad (2)$$

$$\forall q(y_q \geq \bar{y} \wedge y_{q-1} < \bar{y}), \quad (3)$$

де $\bar{y}$ – усереднена амплітуда сигналу (загальний випадок), для центрованого сигналу $\bar{y} = 0$. Змінні m і l складають базис усереднення $b = m + l$, причому $m = n$, а $l = n + 1$. Несиметричність складових базису m і l зумовлена умовою визначення позитивного фронту пелюстки коливання (3).

Візуальне представлення запропонованого способу демонструє рис.1 для випадку $n=2$. Множина точок вибірки $Y = \{y_i\}$, де $i \in [0; N]$, на схемі відображена маркерами у формі ромба п.2. Маркерами п.3 позначені точки, які приймають участь в оцінці амплітудних значень. Положення локалізації позитивних фронтів пелюсток, які виділені програмним шляхом, відображені маркерами п.4 та п.5, відповідно для головних та поточних мікросегментів.

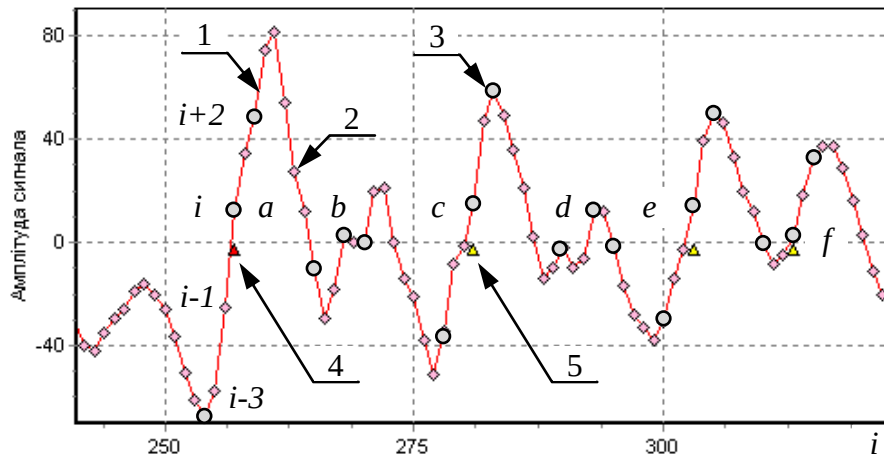


Рис. 1 Схема оцінки амплітуди хвилі

Властивість резистентності запропонованого способу до шумів демонструють фрагменти сигналу b і d . Програма локалізації основного тону вилучила їх із множини аналізу за амплітудним критерієм. Ця властивість забезпечується шляхом уточнення базису обробки сигналу за математичним очікуванням періоду «перетину нуля»:

$$n = \frac{\mu(T^*)}{4} - 1, \quad (4)$$

де $\mu(T^*)$ – математичне очікування періоду «перетину нуля», маркер «*» вказує, що період визначається в інтервалах дискретизації часу.

Оцінка амплітуди коливань забезпечує виділення мікросегментів і являє собою підготовчий етап обробки. Більш складнішою стадією є локалізація головної пелюстки коливань, яка являє собою процес сепарації множини мікросегментів G , тому спосіб її проведення вартий окремого опису.

Аспекти локалізації головної пелюстки коливань

Виявлення специфіки, визначення способів мінімізації похибки та верифікації результатів процесу виділення сегмента основного тону здійснювалось на базі вибірок звукових даних, отриманих за допомогою наступних засобів: мікрофон Canyon CNR-MIC2; звукова карта Realtek HDA; стандартна утиліта «Звукозапис» Windows XP SP3 в монофонному режимі, 12 кГц, 8 біт. В якості тестових фонетичних груп обрано послідовності за схемою: приголосна + голосна → голосна → голосна + приголосна, наприклад, /па-а-ап/. Вибір такої схеми зумовлено більшою поліморфністю акустичного сигналу. Результати проведених досліджень, які застосовувались у синтезі методу виділення мінімальних сегментів мовного потоку приведені на рис. 2 та рис. 3.

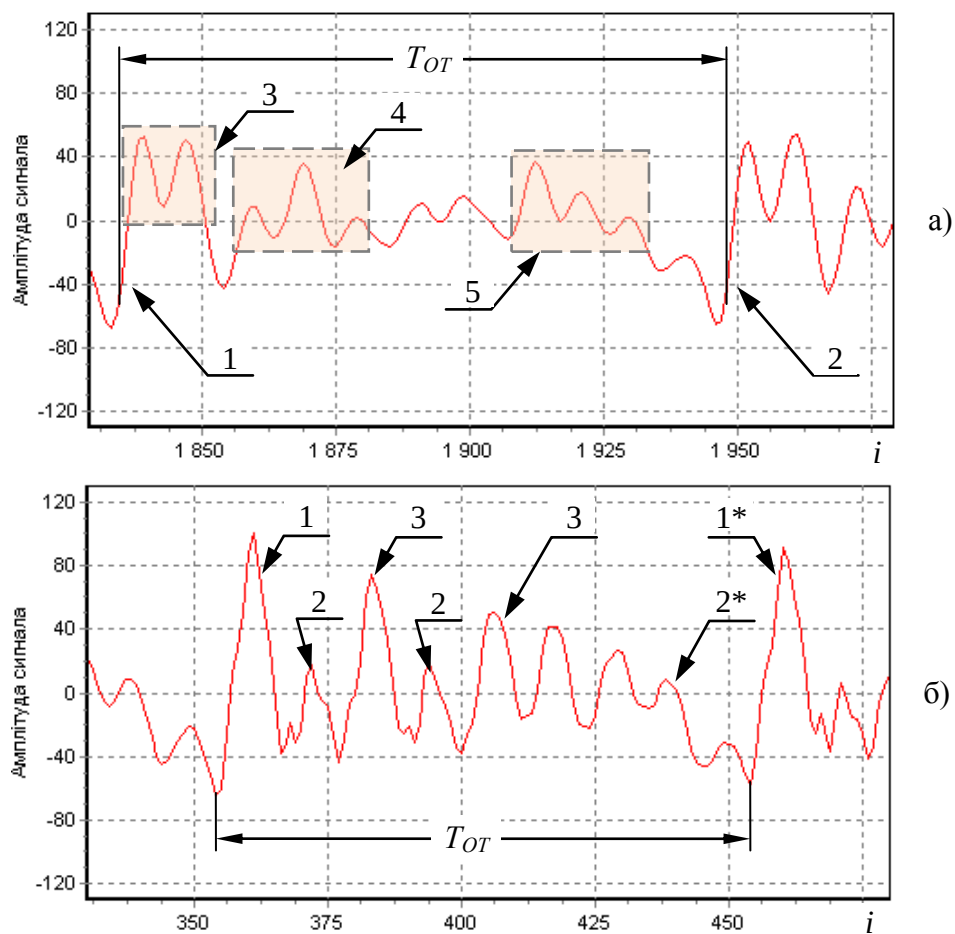


Рис. 2 Фонограми фонем /ра/ та /па/ у фазі формування приголосного звуку

У процесі розв'язування задачі виділення початку сегменту за первинні брались методи амплітудної селекції. Такий вибір обумовлений з огляду простоти реалізації. Однак, практичні досліди з сепарації пелюсток за піковим методом дали вкрай низьку достовірність виділення – $p < 0,4$. Основною причиною є адитивна взаємодія формант F_1 , F_2 і навіть F_3 , яка породжує області, позначені п. 3-5 на рис.2 а. Вказані області демонструють ефект суттєвого зменшення амплітуди пелюстки. У деяких випадках, амплітуда настільки зменшується, що стає співставною з амплітудами наступних коливань. Дану проблему загострює необхідність врахування можливості зменшення інтенсивності вимови фонем у фазі її спаду. Із зазначених причин головна пелюстка не

може бути ідентифікована лише шляхом зменшення критеріальної оцінки. Досягнення прийнятного рівня достовірності селекції слід пов'язувати із врахуванням часових інтервалів мікросегментів G .

Проблеми локалізації сегменту ОТ створює поява пелюсток малої амплітуди. Доцільно їх розділити за характером прояву на дві групи. Перші з них гарно виражені та в міру центровані, за формою вони подібні до головних. Їх прикладом може слугувати пелюстка п.2 на рис. 2б. Друга група – пелюстки високочастотних мод, відмінна від перших за шириною, і як правило, розміщені асиметрично по відношенні до ізоїнії, що демонструє виділення п.3 на рис. 3. Обидві групи ускладнюють процес локалізації ОТ, оскільки такий критерій, як передування головній пелюстці (п. 1* рис. 2б) хвилі коливання малої амплітуди (п. 2*), зумовить хибне виділення для групи пелюсток п. 3 і п. 2. Зниження ризиків такого виду можливо досягти методом амплітудної селекції за критерієм:

$$A_j^* < k_{\min} \cdot A_{\max}^*, \quad (5)$$

де $A_{\max}^*$ – поточна максимальна амплітуда, за яку приймається амплітуда попередньої головної пелюстки; $k_{\min}$ – коефіцієнт приведення до мінімального порогового значення. Для відсікання пелюсток високочастотних мод необхідно щоб $k_{\min} \in [0.125; 0.25]$. Для аналізу ділянок початку формування фонем в якості $A_{\max}^*$ приймається довільна пелюстка, яка більша за попередні. Виключення пелюсток з множини аналізу за критерієм (5) дещо стабілізують показник достовірності локалізації на рівні 0.7, але цього не достатньо для розв'язання задач аналізу мовного потоку. Кращі результати розділення забезпечує критерій симетрії позитивного фронту $y_{q+m} - y_q \approx y_q - y_{q-l}$. Рівень симетрії для головних пелюсток найвищий, для звичайних – менший.

Складним, з точки зору виділення початку сегменту, є випадок заходження мовного сигналу в область насичення, що демонструє рис.3. Інколи, для зазначеного випадку спостерігався ефект зменшення амплітуди першої пелюстки п.1 порівняно із другою п.4, що зумовлено більшою енергетикою від'ємної півхвилі п.5. Ідентифікація головної пелюстки шляхом співставлення тривалості першого T_{F1} та останнього T_{end} періодів коливань поточного фрагменту мови, в більшості випадків, давали позитивний результат, що зумовлено затягуванням від'ємної напівхвилі останнього періоду (див. рис.2). Цей ефект для фонем чистих голосних звуків проявляється менш виражено, що демонструє рис. 3. Внаслідок значної варіабельності тривалості періодів T_{end} , використання його величини у визначенні критеріальної оцінки пошуку головної пелюстки є не доцільним.

Окремо, слід виділити результати досліджень у розв'язуванні задачі локалізації ОТ шляхом використання оператора «Teager's Energy» [7] для випадку, коли мовний сигнал заходить в область насичення. Ці результати продемонстрували, що без проведення глибокої фільтрації звукових даних, обробка за зазначеним методом зумовить появу у вихідному масиві чисельної серії високоенергетичних пульсацій. За таких обставин, процес виділення сегменту ОТ буде мати низьку ефективність.

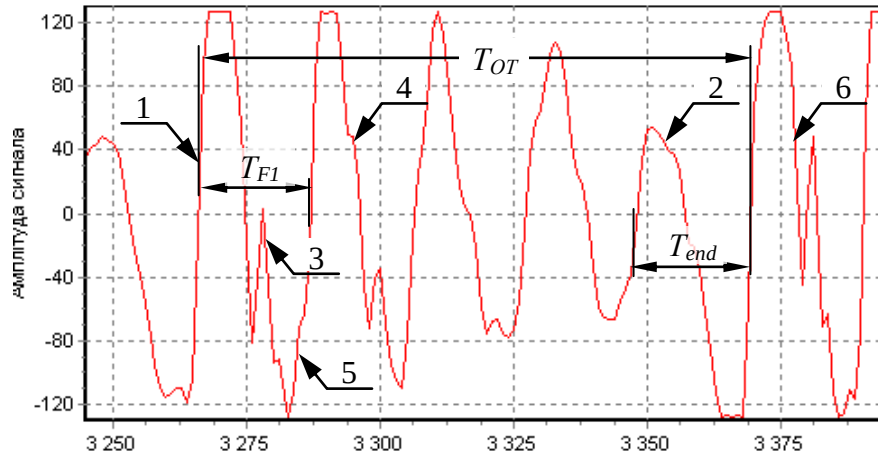


Рис. 3 Фонограма фонемі /а/ для випадку заходження сигналу в область насичення

Викладені в межах даного розділу аспекти засвідчують нетривіальність розв’язування задачі локалізації ОТ. Оптимальний її розв’язок знаходиться в самому означенні. Так, під сегментом основного тону, як складова сигналу, розуміється максимальний, квазіперіодичний фрагмент мовного потоку. Тобто кожний наступний сегмент від попереднього мало відрізняється за амплітудою, формою і часовими інтервалами пелюсток. Виходячи з такого формулювання, критеріальною оцінкою може слугувати допустима величина розбіжності за амплітудними δ_A чи часовими δ_T значеннями:

$$\frac{1}{v \cdot |A_{1,0}^* - A_{0,0}^*|} \cdot \sum_{j=1}^v |A_{1,j}^* - A_{0,j}^*| \leq \delta_A, \quad (6)$$

$$\frac{1}{v} \cdot \sum_{j=0}^v |T_{1,j}^* - T_{0,j}^*| \leq \delta_T, \quad (7)$$

де v – кількість пелюсток, які знаходяться між поточною і головною пелюстками попереднього сегменту; $A_{1,j}^*$ і $A_{0,j}^*$ – оцінки амплітуд, а $T_{1,j}^*$ і $T_{0,j}^*$ – періоди пелюсток поточного, позначеного індексом 1, і попереднього сегменту ОТ, – індекс 0. В межах проведених досліджень, значення критеріїв розбіжності δ_A і δ_T приймалися на рівні 5% від максимальної амплітуди та періоду ОТ, відповідно.

У випадку, коли кількість пелюсток в сегментах різна, сепарацію пелюсток за критерієм (6) проводять наступним чином. Кількість пелюсток вибирають за тим сегментом, в якому їх більше. Порівняння амплітуд для відсутньої пелюстки здійснюють за оцінкою, яка відповідає, з врахуванням зміщення, положенню перетину «нуля» поточної пелюстки базового сегменту.

Реалізація методу

З точки зору характеру отримання даних Y слід виділити два підходи: буферизації та поточний. Перший буде мати місце у процесі передачі масиву від пристрою, який перетворює акустичний сигнал в цифровий вигляд (звукова карта), методом прямого доступу до пам’яті. Другий підхід можливо реалізувати шляхом використання

мікроконтролера, в якому обробку кожного семпла можливо здійснити у процедурі обробки переривання за подією завершення перетворення АЦП. Розробка алгоритму виділення мінімальних сегментів мовного потоку здійснювалась саме для поточного виду отримання даних. Незважаючи на те, що буферизація все одно буде мати місце, такий вибір зумовлений вимогами уніфікації процесу, мінімізації обсягу пам'яті та обчислювальних витрат.

Локалізацію ОТ мовного потоку доцільно здійснювати в наступній послідовності:

1. Поточний семпл з АЦП переноситься в буфер даних сегменту. За значенням отриманого семпла перевіряється умова переходу сигналу через нуль (3). Якщо умова не виконується, то здійснюється вихід із процедури локалізації, в протилежному випадку – перехід до пункту 2.
2. Пропускаються m семплів та знаходиться оцінка амплітуди для поточної пелюстки.
3. Перевіряється подібність поточної пелюстки до головної попереднього сегменту за критеріальною оцінкою: $A_{1,j}^* \geq 0.75 \cdot A_{0,0}^*$. Якщо умова виконується, то виконується перехід до пункту 4.
4. В протилежному випадку проводиться перевірка на потужність пелюстки за критерієм (5), що дозволяє класифікувати поточну пелюстку як слабку чи як звичайну. Фіксуються параметри пелюстки та здійснюється вихід із процедури локалізації.
5. Ідентифікація поточної пелюстки як головної здійснюється за критерієм (6). За її результатами пелюстка помічається як звичайна чи головна.
6. Верифікація процесу виділення проводиться за формулою (7). У випадку, коли результати верифікації негативні, сегмент позначається як сумнівно виділений. Він приймає участь в подальшому аналізі, але знижує достовірність результатів.
7. Процес пункту 5 завершує процедуру локалізації ОТ. Змінюється вказівник на буфер даних наступного сегменту.

Застосування в критеріальних оцінках коефіцієнтів ряду 0,125, 0,25 і 0,75 забезпечує заміну використання чисел з фіксованою чи плаваючою точкою, а також операцій множення і ділення, на більш швидкі операції зсуву, віднімання та додавання. Такий підхід дозволяє у вбудованих системах розпізнавання мови застосовувати навіть такі малобюджетні мікроконтролери, як сімейство AVR.

Висновки

Підбиваючи підсумок за результатами досліджень слід виділити наступне:

1. Отриманий метод локалізації сегментів ОТ можливо віднести до групи медіанних фільтрів, якщо взяти до уваги, що ядро фільтра складають одиниці на краях і нулі в межах його тіла.
2. Виділення мінімальних сегментів мовного потоку за оцінкою амплітуди коливань можлива навіть без проведення низькочастотної чи смугової фільтрації.
3. Запізнення ідентифікації основних пелюсток становить один період основного тону.
4. Прийнятний рівень достовірності виділення головних пелюсток в мовному сигналі можливо забезпечити шляхом комбінації амплітудної та інтервальної селекції за умови врахування міри подібності групи суміжних пелюсток. В

рамках досліджень, достовірність локалізації ОТ була меншою за 0,9 лише на трьох перших сегментах ділянки наростання сигналу.

5. Кількість позитивних пелюсток у сегменті основного тону варіюється в межах 2..8.
6. Рівень стиснення звукових даних, який досягається внаслідок параметризації сигналу шляхом оцінки амплітуди коливань, не нижче 24 разів.
7. Програмну реалізацію процесу локалізації сегменту ОТ можливо здійснити на базі легких операцій: порівняння, зсуву, додавання і віднімання.
8. Виділення сегментів ОТ у випадку, коли мовний сигнал заходить в область насичення, ускладнено. Зниження ризиків такого виду спотворень сигналу слід здійснювати апаратними засобами, наприклад, шляхом використання звукових компресорів типу SSM2167, при чому час затримки не повинен перевищувати 20 мс.

Зазначені властивості та показники дозволяють стверджувати, що виділення мінімальних сегментів мовного потоку шляхом оцінки амплітуд коливань надає можливість покращити процес сегментації мовного потоку та підвищить ефективність систем розпізнавання мови. Також отримані результати досліджень будуть корисними у сфері цифрової телефонії.

Література

1. Перспективы развития систем распознавания речи /Выдержка из исследования. // Залладка Работа со звуком. Исследования и прогнозы в ИТ. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://habrahabr.ru/post/232613/>
2. Голубинский А. Н. Расчёт частоты основного тона речевого сигнала на основе полигармонической математической модели // Вестник Воронежского института МВД России. – 2009. – № 1. – С. 81-89
3. Небилиця А.Ю. Часові та спектральні характеристики мовного потоку. / Актуальні проблеми природничих та гуманітарних наук у дослідженнях студентської молоді «Родзинка – 2012» / XIV Всеукраїнська студентська наукова конференція. – Черкаси: Брама-Україна, 2012. – С.422-424.
4. Физиология речи. Восприятие речи человеком. / Чистович Л. А., Венцов А. В., Гранстрем М. П. и др. // серия: «Руководство по физиологии». – Л.: Наука. – 1976. – 388 с.
5. Устойчивость оценок формантных частот / В.Н.Сорокин, А.С.Леонов, И.С.Макаров // Речевые технологии. – 2009. – №1. – С. 3-21.
6. Рабинер Л. Р. Цифровая обработка речевых сигналов / Рабинер Л. Р., Шафер Р. В.: пер. с англ. / Под ред. М. В. Назарова и Ю. Н. Прохорова. – М.: Радио и связь. – 1981. – 496 с.
7. Kaiser J. F. On a simple algorithm to calculate the 'energy' of a signal // in Proc. IEEE Int'l. Conf. Acoust., Speech, Signal Proc. – Albuquerque, NM. – April 3-6 1990. – pp. 381-384.

Стаття надійшла 28.03.2014
Прийнято до друку 08.04.2014

Аннотация

А. Ю. Небилиця

Оптимизация метода выделения минимальных сегментов потока речи

Приобрел последующее развитие метод амплитудно-интервальной локализации сегментов основного тона. Доказана эффективность использования метода нулей сигнала при выделении минимальных сегментов потока речи в случае замены абсолютных значений амплитуд колебаний на их оценки, которые определены по разностной схеме с расширенным базисом. Описаны виды и специфика сепарации лепестков колебаний сегмента основного тона. В работе определены: способ нахождения базиса, критериальные оценки выделения главного лепестка, базовый алгоритм и способ верификации результатов анализа. Приведены

рекомендации относительно аппаратной предобработки речевого сигнала и кодовой реализации оптимизированного метода сегментации потока речи.

Ключевые слова: *поток речи, основной тон, распознавание речи, амплитудно-интервальная селекция, метод нулей сигнала, разностная схема.*

Summary

A. Yu. Nebylytsia

Optimization of minimal segments localization of speech stream method

There was another development phase tracked for the amplitude-interval localization of the pitch segments method. The usage efficiency of the zero-crossing method in the allocation of the minimal segments of the speech stream in cases of replacement of the absolute values of the amplitudes with their evaluation, which were defined by the difference scheme with an extended basis, was proved. There were types and specifics of the Petals fluctuations of the pitch segment described. The article contains the following definitions of the method for finding a basis, criterial evaluation for the pitch petal selection, the basic algorithm and the method of verification of the analytical results. There were recommendations provided concerning the hardware preprocessing of the speech signal and coding implementation of the optimized method of the speech stream segmentation.

Key words: *speech stream, pitch-segment, speech recognition, peak-interval selection, zero-crossing method, deferent chart.*

УДК 544.015, 517.958

В.М. Безпальчук

МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ УМОВ НАПИЛЕННЯ НА ПРОЦЕС ФАЗОУТВОРЕННЯ В СИСТЕМІ Ni-AL МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ДИНАМІКИ

У роботі представлена комп'ютерна модель процесу напилення атомів нікелю на поверхню наноплівки з атомів алюмінію. Показано вплив початкових умов (температури, густини потоку) на сам процес напилення і формування структур на контакті. Встановлено, що у випадку напилення при достатньо високій температурі в зоні контакту виникає впорядкована фаза з ОЦК решіткою, присутність якої робить контактне плавлення неможливим. Комп'ютерне моделювання проводилось за допомогою класичного методу молекулярної динаміки з використанням ЕАМ потенціалу міжатомної взаємодії

Ключові слова: молекулярна динаміка, система Ni-Al, напилення, твердий розчин, наноплівка, метод зануреного атому, радіальна функція розподілу.

Вступ

Мультишарові фольги широко використовуються для реалізації екзотермічної реакції у процесах самопоширюваного високотемпературного синтезу [1]. Самопоширюваний високотемпературний синтез є одним із найбільш перспективних напрямків в сучасному матеріалознавстві. Речовини, які синтезуються вказаним методом, характеризуються набором оптимальних і ефективних властивостей. Дані властивості досягаються наявністю в структурі речовин фаз, що взаємодоповнюються комплексами фізико-хімічних, механічних та інших параметрів. Основною задачею високотемпературного синтезу традиційно є отримання порошкових композитних матеріалів для їх використання в якості різноманітного захисного покриття, з використанням методів плазмового, магнетронного чи детонаційного напилення [2-4]. Тому існує необхідність розробки фізичної моделі, яка б адекватно і якісно описувала даний процес, а також процес фазоутворення на контакті наноплівок, дозволяла підбирати геометричні і дифузійні параметри нанорозмірних фольг.

Наноплівки для мультишарових нанофольг найчастіше формуються за допомогою методу напилення одного металу на інший. В процесі такого напилення на контакті можуть виникати різні структури, від появи або відсутності яких може змінюватись механізм утворення фаз на інтерфейсі металів. В даній роботі досліджується проблема впливу температури, густини потоку на формування структур на контакті під час такого напилення.

Одним із шляхів вирішення окресленої проблеми є моделювання процесу напилення на атомному рівні методом молекулярної динаміки (МД). У свою чергу постає необхідність в аналізі та дослідженні характеристик, що можуть впливати на результати напилення, а також у поясненні причин появи тих чи інших структур на контакті [5].

Аналіз останніх досліджень і результатів

Одне з найбільш систематичних досліджень реакцій у системі нікель-алюміній було зроблено в Технологічному Університеті Ейндховена [6–7]. Згідно з результатами цих досліджень, при взаємодії нікелю з твердим алюмінієм (тобто нижче 660°C) першою виникає і швидко росте фаза Ni_3Al . Але як показують нещодавно проведені молекулярно-динамічні експерименти Ф. Бараса і О. Політано [8-9], безпосередній контакт монокристалу Ni і монокристалу Al може призводити до появи неупорядкованої першої фази. Є підстави вважати, що ця перша фаза може бути рідкою. Подібна гіпотеза була згодом опублікована у роботі [10]. Однак, якщо попереднє створення мультишарового зразка призводить до утворення сполук у твердому розчині на інтерфейсі між Ni та Al , то шлях послідовності фазоутворення може значно змінитись. Якщо рідкий розчин не виникне як перша фаза, то зміниться механізм зародкоутворення і наступної фази, тому дуже важливо дослідити, яка структура виникне або може виникнути на контакті Ni та Al у випадку напилення одного металу на інший. При цьому стан контакту зон Ni і Al може сильно залежити від умов напилення (температура, густина потоку).

Постановка завдання

Завданням цієї роботи було дослідити характеристики, що можуть впливати на результати напилення атомів нікелю на алюміній і алюмінію на нікель, а також описати появу тих чи інших структур на контакті. В ході вирішення даного завдання було промодельовано процес напилення на атомному рівні методом молекулярної динаміки (МД). Ця проблема аналізувалась методом МД з використанням потенціалу ЕАМ (*embedded-atom method* – метод зануреного атому). ЕАМ потенціал для методу МД, який використовується для системи Ni-Al , був розроблений Ю. Мішиним [11] для інтерметалічної сполуки $\text{B2} - \text{NiAl}$. Цей потенціал також широко використовується й для інших структур таких як: $\text{L12} - \text{Ni}_3\text{Al}$, Ni , Al .

Моделювання процесу напилення здійснювалось за допомогою програмного пакета LAMMPS (*Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator*), який є вільно поширюваним програмним забезпеченням для моделювання методом молекулярної динаміки [12, 13]. Візуалізація результатів проводилась за допомогою програмного засобу OVITO [14].

Виклад основного матеріалу (Експерименті і результати)

В ході моделювання було проведено ряд МД-експериментів процесу напилення з різною температурою підкладки та різними розмірами підкладки.

В Експерименті 1, в початковий момент система містить лише 4800 атомів алюмінію, які утворюють 6 паралельних атомних площин (001) з гранецентрованою кубічною решіткою. Відповідно, висота шару Al $h \approx 12.18 \text{ \AA}$, довжини по осям $L_x = L_y =$

81.74 Å. Вдovж напрямків ОХ ОУ застосовані періодичні граничні умови. В експерименті проводилось моделювання наплення 1280 атомів нікелю на алюміній протягом 32 нс, при температурі $T=290$ К в умовах мікроканонічного статистичного ансамблю NVT. Для порівняння проводилось моделювання за тих же параметрів, але для температури $T = 900$ К.

При напленні атоми Ni з'являлися на висоті 6 нм від поверхні підкладки у випадковому місці в межах площини $[0, L_x; 0, L_y]$ з періодом в 25 нс. Початкова швидкість кожного атому Ni складала $v = 900$ м/с і була перпендикулярно направлено до площини підкладки.

Після проведення моделювання було помічено ознаки утворення кристалічних структур $Ni-Al$ на поверхні зразка, і для підтвердження цього, був здійснений пошук структурного параметру для ближнього порядку розташування атомів різного сорту в кристалічному сплаві.

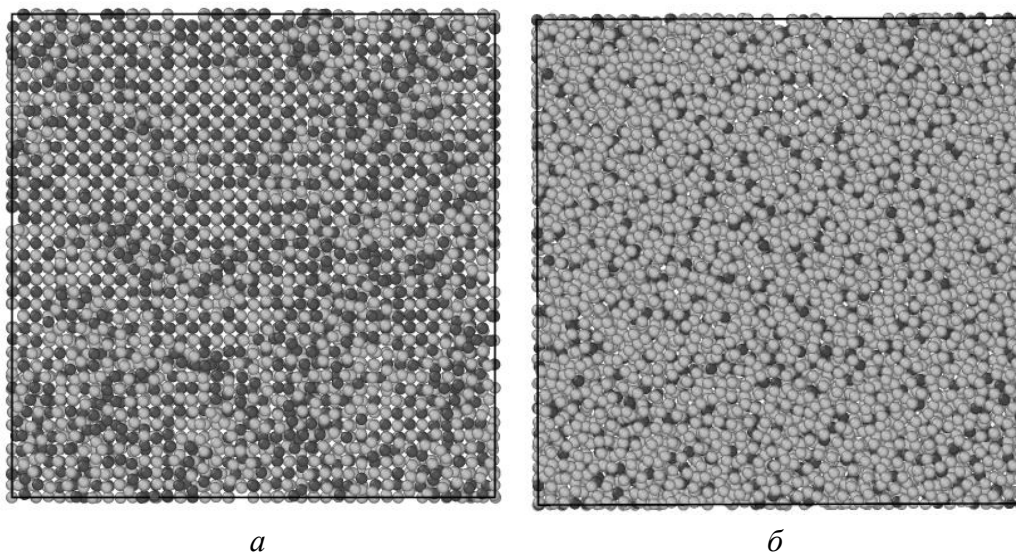


Рис. 1. Результати наплення атомів нікелю на алюмінієву поверхню:

а) $t = 32$ нс, $T=290$ К; б) $t = 32$ нс, $T=900$ К.

Атоми Ni і Al показані відповідно темно-сірими та світло-сірими сферами.

Розрахунки проводились для поверхневого прошарку атомів (в даному випадку поверхневими вважались атоми, що мають до 6 сусідів включно), для цього окремо обчислювались кількості пар атомів $Al-Al$, $Ni-Ni$, $Al-Ni$. Критерій ближнього порядку розраховувався за формулою:

$$\varphi = \frac{N_{AB} - 2N_p C_A C_B}{N_p (1 - 2C_A C_B)}, \quad (1)$$

де C_A, C_B – концентрації атомів типу А і типу В, N_{AB} – кількість пар атомів різного типу, N_p – загальна кількість пар атомів. В результаті шуканий параметр становив $\varphi = 0.312$, а значення $N_{Al-Al} = 109$, $N_{Ni-Ni} = 48$, $N_{Al-Ni} = 158$, що може свідчити про

наявність хоч і не дуже значного, але все ж упорядкування у промодельованому зразку, а отже і про можливість утворення структур *Ni-Al* в процесі напилення.

В другому випадку (рис.1 - б) була промодельована та ж сама система, але з іншою температурою ($T = 900 \text{ K}$), при цьому можна бачити, що атоми *Ni*, які напилюються на поверхню, проникають глибше в шар *Al*, виштовхуючи атоми *Al* на поверхню, і вони тепер складають більшість поверхневих атомів у порівнянні з попереднім зразком.

В ході моделювання методом МД було проведено ряд експериментів процесу напилення при різних температурних режимах. На першому етапі напилення проводилось при підвищеній температурі, на іншому етапі напилення проводилось при кімнатній температурі з подальшим нагрівом. При порівнянні цих експериментів в моделі напилення з температурою 730 K, 830 K помічено утворення нової структури з ВСС (*body-centered cubic* – об’ємноцентровано кубічна) решіткою в зоні контакту, при цьому атоми алюмінію утворюють FCC (*face-centered cubic* – гранецентровану кубічну решітку). Дана структура залишається стійкою і після припинення напилення, при цьому можна припустити, що вона перешкоджає утворенню інших структур або ж рідини в цій зоні контакту. Для перевірки можливості утворення рідини у зоні контакту, що може характеризуватись значною кількістю неструктурованих атомів, модель була збільшена в розмірах. Для неї в подальшому були обраховані радіальні функції розподілу.

Експерименти 2-4

На початковій стадії система складається з шару *Al*, висота якого 6 атомних площин. Шар *Al* має тип ґратки FCC (ГЦК). Висота шару *Al* $h \approx 16.2 \text{ Å}$, довжини по осям $L_x = L_y = 36.45 \text{ Å}$, але при цьому вздовж напрямку вісі *OX* та вісі *OY* застосовані періодичні граничні умови. В ході роботи було проведено моделювання напилення 1280 атомів нікелю на поверхню з 1300 атомів алюмінію. Моделювання для першого випадку проводилось за час 55 *нс*, і температурі $T=730 \text{ K}$ для мікροканонічного статистичного ансамблю NVT. На першому етапі відбувалось напилення протягом 35 *нс*, після цього (другий етап) підтримувалась постійна температура 730 K протягом 20 *нс*. В другому експерименті цей же зразок напилювався при температурі 830 K. Для обох випадків маємо утворення плівки *Ni-Al*, яка має ОЦК-структуру решітки. Кількість атомів, що належить даній структурі, росте з процесом напилення, але після певного періоду часу стабілізується і залишається сталою і після припинення напилення (рис. 3).

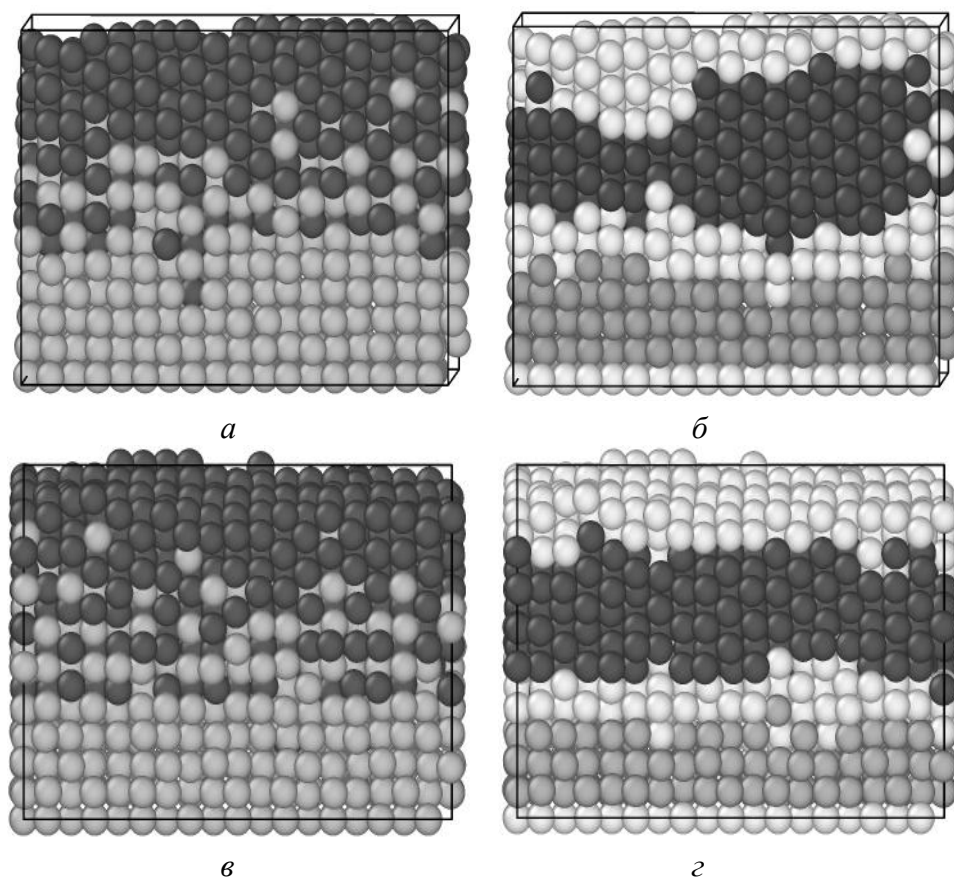


Рис.2 Результати наповнення атомів нікелю на алюмінієву поверхню в перерізі по осі OY

I. (а, б) – ($t = 55$ нс, $T=730$ К); (в, г) – ($t = 60$ нс, $T=830$ К).

II. (а, в) – темно-сірий колір це атоми Ni, світло-сірий колір це атоми Al; (б, г) – показана структура атомної решітки, де світло-сірий колір – атоми належать решітці FCC, темно-сірий колір – атоми належать решітці BCC, білий колір – атоми з невизначеною структурою.

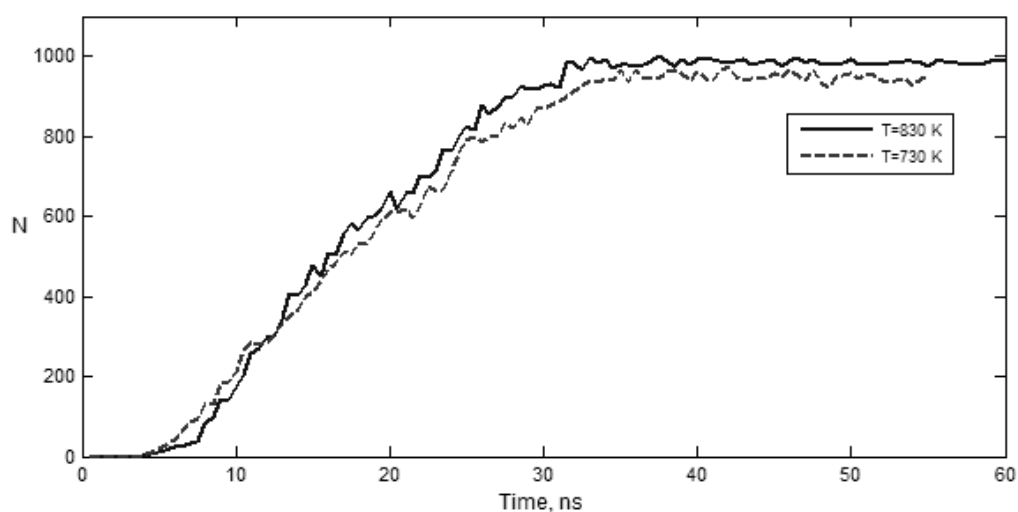


Рис. 3. Ріст кількості атомів, що належать решітці BCC (ОЦК) у процесі наповнення ($t = 55$ нс, $T=730$ К (штрихова крива) і $t = 60$ нс, $T=830$ К (суцільна крива)).

В іншому експерименті було промодельовано напilenня для зразка з попередніми розмірами з такими ж граничними умовами по осях OX OY . В ході роботи 1300 атомів нікелю напильовались на поверхню з 1300 атомів алюмінію. Моделювання проводилось за час 46 *нс* для мікроданонічного статистичного ансамблю NVT. На першому етапі відбувалось напilenня протягом 36 *нс* при температурі 290 К, на другому етапі температура підвищувалась до 700 К і підтримувалась протягом 10 *нс*. У даному випадку, коли напilenня велось при кімнатній температурі, кількість атомів з ВСС-решіткою порівняно незначна, і з підвищенням температури після напilenня не збільшується (рис 4.).

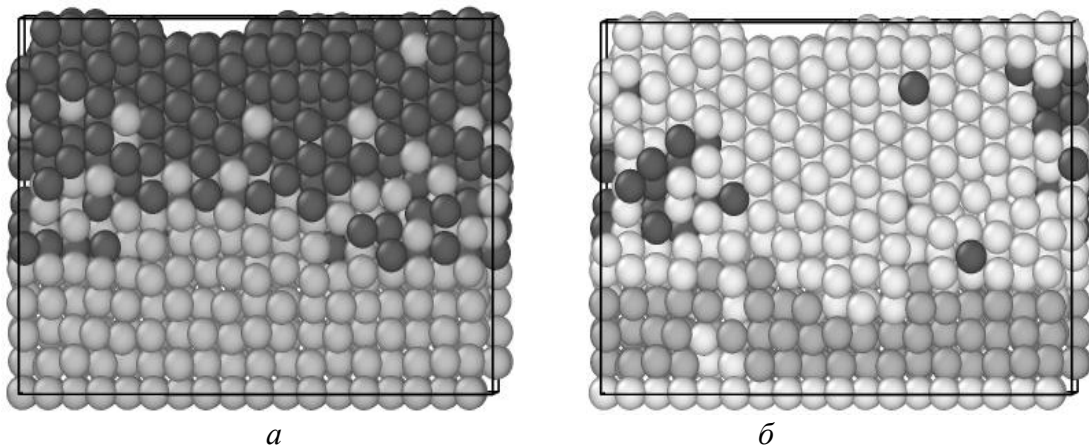


Рис.4 Результати напilenня атомів нікелю на алюмінієву поверхню в перерізі по осі OY
I. (а, б) – ($t = 36$ *нс*, $T=290$ К напilenня + $t = 10$ *нс*, $T=700$ К нагрів)

II. (а) – темно-сірий колір це атоми Ni , світло-сірий колір це атоми Al ; (б) – показана структура атомної решітки, де світло-сірий колір – атоми належать решітці FCC, темно-сірий колір – атоми належать решітці ВСС (ОЦК), білий колір – атоми з невизначеною структурою.

Експеримент 5

В одному з експериментів проводилось дослідження напilenня атомів алюмінію на підкладку з атомів нікелю. Результати такого напilenня наведено нижче на рис. 5. Після проведеного моделювання можна побачити, що присутнє дуже низьке перемішування атомів різного сорту, навіть при температурі в 700 К. Атоми алюмінію, що осідають на підкладку, утворюють плівку з FCC решіткою, при цьому на контакті не спостерігається якихось структурних утворень. Це можна пояснити більшими розмірами атомів та міжатомних відстаней решітки атомів алюмінію в порівнянні з атомами нікелю

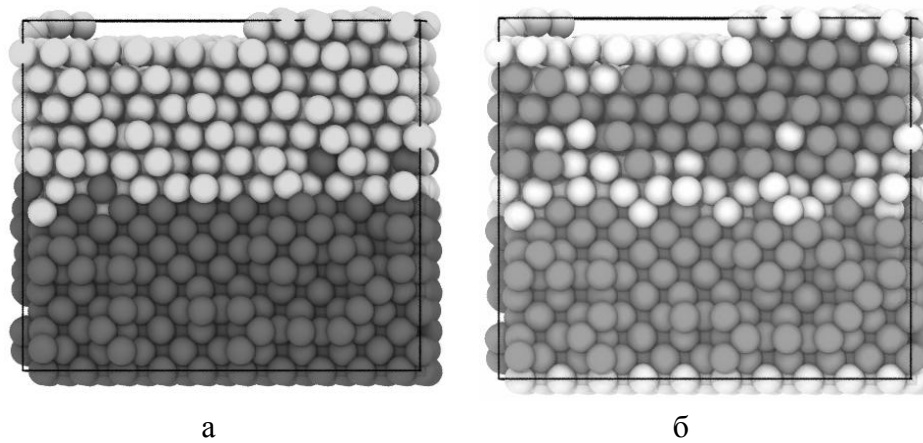


Рис. 5. Результати наплення атомів алюмінію на нікелеву поверхню в перерізі по осі OY

I. (а, б) – ($t = 27$ нс, $T = 700$ К).

II. (а) – темно-сірий колір це атоми Ni, світло-сірий колір це атоми Al;
(б) – показана структура атомної решітки, де світло-сірий – атоми належать решітці FCC, білий колір – атоми з невизначеною структурою.

Експеримент 6

В 6-му випадку було промодельовано наплення для зразка з висотою шару Al $h \approx 70.5$ Å, довжини по осям $L_x = L_y = 52.245$ Å, періодичні граничні умови по осях OX OY. В ході роботи 5000 атомів нікелю наплювались на поверхню з 6448 атомів алюмінію. Моделювання проводилось за час 47 нс для мікромеханічного статистичного ансамблю NVT. На першому етапі відбувалось наплення протягом 40 нс при температурі 290 К, на другому етапі температура підвищувалась до 980 К і підтримувалась протягом 7 нс.

Для перевірки можливості аморфізації або виникнення плавлення в зоні контакту напленої плівки і підкладки було використано радіальну функцію розподілу (РФР, RDF).

Функція RDF є кількісною характеристикою упорядкованості структурних елементів речовини і змінює форму графіку при різних ступенях упорядкованості. Дана функція описує ймовірність того, що дві частинки знаходяться на певній віддалі одна від іншої. Зазвичай радіальна функція розподілу позначається $G(r)$.

$$G(r) = \frac{\Delta N}{4\pi r^2 \Delta r}, \quad (2)$$

де ΔN – визначає число частинок (атомів чи молекул), що знаходиться в шарі товщиною Δr на відстані r від випадково вибраної частинки і $\rho = \frac{N}{V}$ – середня концентрація частинок на одиницю об'єму. По вигляду цієї функції можна визначити, в

якому стані знаходиться система. Для кристалічних твердих тіл функція RDF має яскраво виражені піки, а при переході у рідкий стан ці піки зливаються.

Для визначення RDF, що відповідає б рідкому стану, було проведено моделювання плавлення чистого алюмінію. Моделювання проводилось методами МД та ЕАМ в пакеті LAMMPS, з використанням ЕАМ - потенціалу за 2009 рік розробленим Ю. Мішиним для системи B2-Ni-Al. З графіків RDF була знайдена модельна температура плавлення для алюмінію $T \approx 1090$ К.

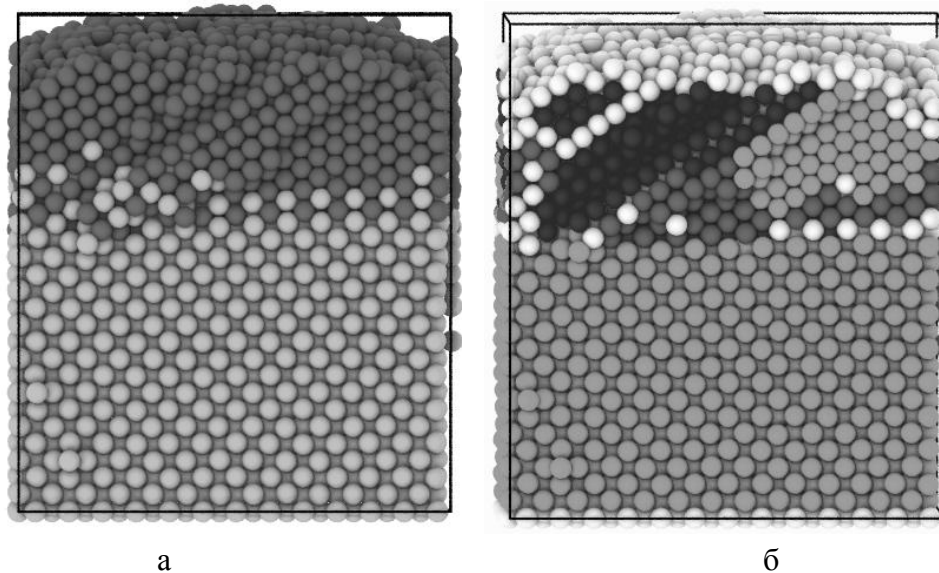


Рис. 6. Результати нагріву моделі при $t = 40$ нс, $T=290$ К після наповнення атомів нікелю на алюмінієву поверхню, в перерізі по осі OY

а) – темно-сірий колір це атоми Ni, світло-сірий колір це атоми Al; б) – показана структура атомної решітки, де світло-сірий колір – атоми належать решітці FCC, темно-сірий колір – атоми належать решітці BCC, чорний колір – атоми з НСР структурою, білий колір – атоми з невизначеною структурою.

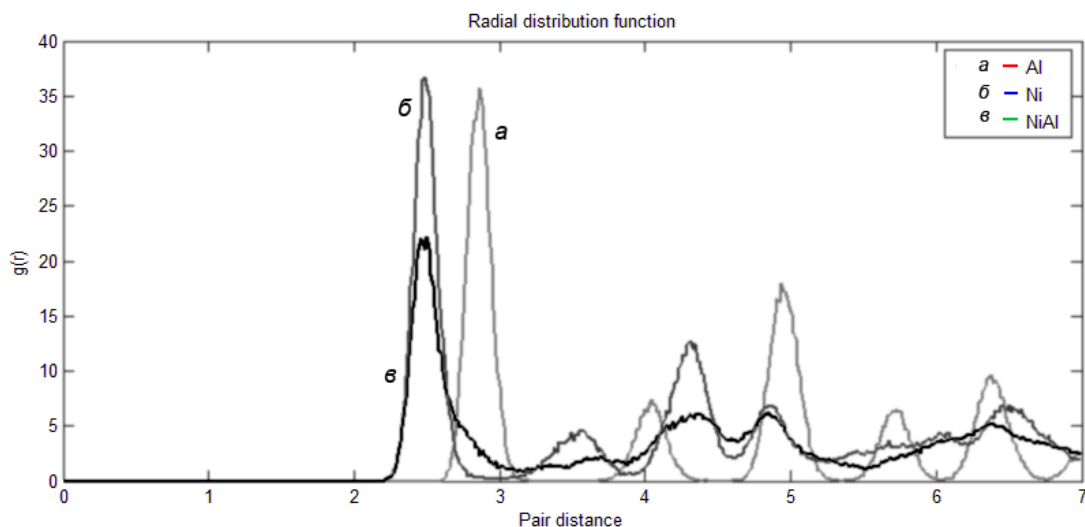


Рис. 7. Функції RDF для трьох частин зразка після наповнення ($t = 30$ нс, $T=290$ К).

а) – зона атомів Al, б) – зона атомів Ni, в) – зона контакту атомів Al і Ni

В ході моделювання наплення було побудовано для порівняння RDF функцій атомів трьох частин зразка:

- атомів алюмінію, що належать підкладці
- атомів з алюмінію та нікелю, що належать зоні контакту
- атомів нікелю, що осіли після наплення

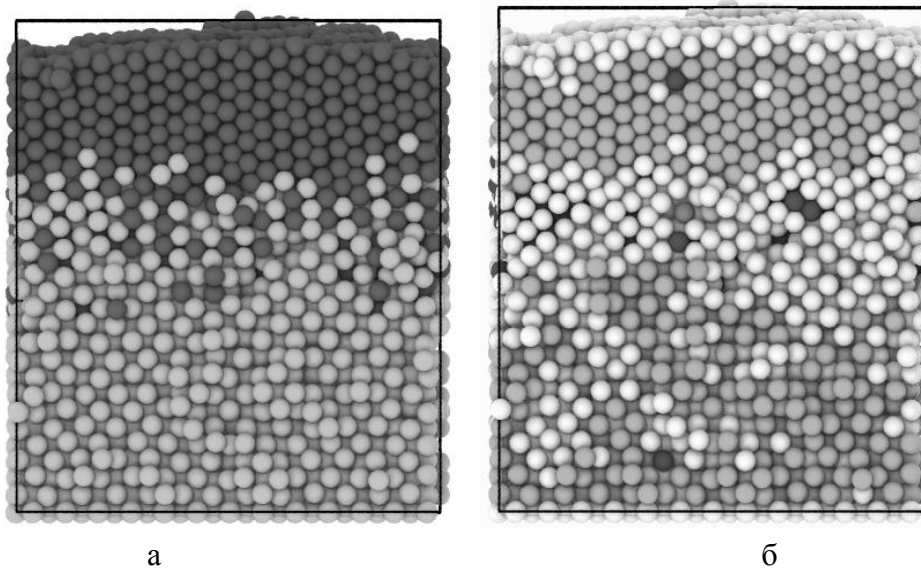


Рис. 8. Результати нагріву моделі при $t = 7$ нс, $T=980$ К після наплення атомів нікелю на алюмінієву поверхню, в перерізі по осі OY

а) – темно-сірий колір це атоми Ni, світло-сірий колір це атоми Al; б) – показана структура атомної решітки, де світло-сірий колір – атоми належать решітці FCC, темно-сірий – атоми належать решітці BCC, білий колір – атоми з невизначеною структурою.

При порівнянні отриманих RDF для температури 290 К і 980 К можна помітити зміну форми графіку RDF, що відповідає атомам у зоні контакту. При $T=980$ К (яка є нижчою за модельну температуру плавлення алюмінію) форма графіку RDF для зони NiAl близька до форми, яка відповідає рідкому стану упорядкованості атомів (рис. 7, 9).

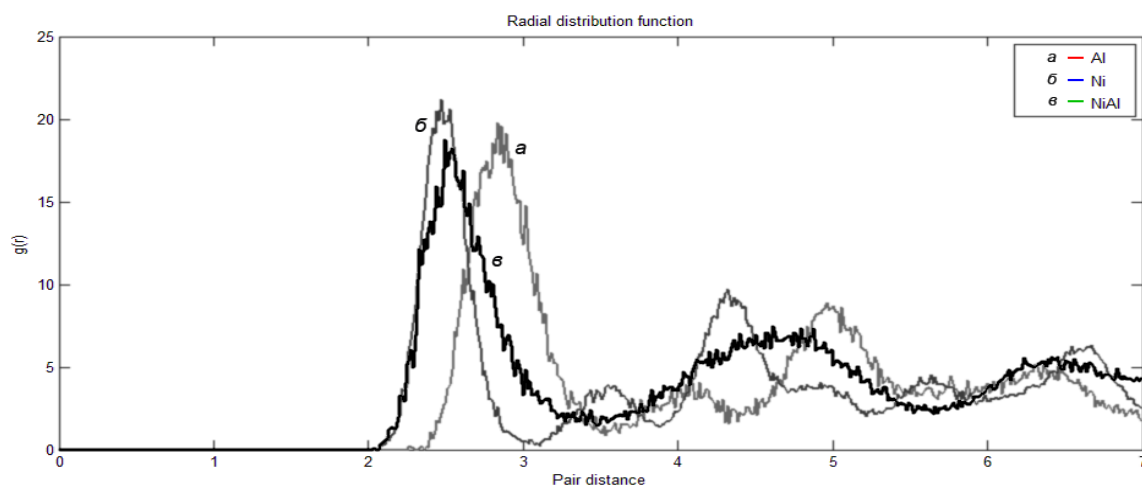


Рис. 9. Функції RDF для трьох частин зразка після нагріву ($t = 7$ нс, $T=980$ К).

а) – зона атомів Al, б) – зона атомів Ni, в) – зона контакту атомів Al і Ni

Висновки

У процесі моделювання було помічено, що при напыленні достатньої кількості атомів та невеликому потоці на інтерфейсі виникає часткове впорядкування. В ході моделювання було досліджено взаємопроникнення атомів нікелю в новоутвореній наноплівці та підкладці з атомів алюмінію. Було встановлено, що після певного початкового періоду напылення в контактній зоні починає формуватися нова фаза з об'ємноцентрованою кубічною (ВСС) решіткою. Була знайдена залежність кількості атомів, що належать новоутвореній фазі з ВСС решіткою, від температури і густини потоку. Кількість атомів з ВСС решіткою спочатку зростає, а потім виходить на асимптоту. Це означає, що отриманий прошарок ВСС - фази заважає контактному плавленню. Але при умовах напылення за звичайної температури і подальшого нагріву може відбуватись контактне плавлення. Отже, можна прогнозувати, що процеси фазоутворення при взаємодії нікелю з алюмінієм суттєво залежать від умов утворення контакту.

Подяки

Робота виконана під керівництвом та у співробітництві з проф. Гусаком А.М. та доц. Богатирьовим О.О.

Література

1. Мержанов А.Г. Твердопламенное горение / А.Г. Мержанов, А.С. Мукасьян. – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2007. – 336 с.
2. Hwang S.-F Molecular dynamic simulation for Cu cluster deposition on Si substrate / Shun-Fa Hwang, Yi-Hung Li, Zheng-Han Hong // Computational Materials Science 56. – 2012. – p.85-94
3. Kim S.-P. A Molecular Dynamics Study of the Deposition and the Diffusion Behaviors of Al on a Cu Surface / S.-P. Kim, K.-R. Lee, Y.-C. Chung, M. Doiand M. Sahashi // Journal of the Korean Physical Society, Vol. 52, No. 4. – 2008. – 1240-1245
4. Moarrefzadeh A. Simulation and Modeling of Physical Vapor Deposition (PVD) Process / Ali Moarrefzadeh // WSEAS transactions on applied and theoretical mechanics, Issue 2, Vol.7. – 2012
5. Storozhuk N.V. Mean-field and quasi-phase-field models of nucleation and phase competition in reactive diffusion / N.V. Storozhuk, K.V. Sopiga and A.M. Gusak // Philosophical Magazine, 1–14, iFirst Article. – 2012.
6. M.M.P. Janssen, G.D. Rieck, Trans. metall. Soc. A.I.M.E., 239: 1372 (1967).
7. M.M.P. Janssen, Metall Trans, 4: 1623 (1973).
8. Baras F. Molecular dynamics simulations of nanometric metallic multilayers: Reactivity of the Ni-Al system / Florence Baras, Olivier Politano //Physical Review B84, 024113 – 2011.
9. Politano F. Microstructure development during NiAl intermetallic synthesis in reactive Ni–Al nanolayers: Numerical investigations vs. TEM observations / O. Politano, F. Baras, A.S. Mukasyan, S.G. Vadchenko, A.S. Rogachev // Surface & Coatings Technology. – 2013. – V. 215 – p.485-492.
10. Rogachev A.S. Structure evolution and reaction mechanism in the Ni/Al reactive multilayer nanofoils / A.S. Rogachev, S.G. Vadchenko, F. Baras, O. Politano, S. Rouvimov, N.V. Sachkova, A.S. Mukasyan // Acta Materialia, Vol.66. – 2014. – p. 86-96.

11. Mishin Y. Embedded-atom potential for B2-NiAl / Y. Mishin, M. J. Mehl, D. A. Papaconstantopoulos // Physical Review B, Vol. 65, 224114 – 2002.
12. Rapaport D.C. The Art of Molecular Dynamics Simulation / D.C. Rapaport – Cambridge University Press New York, NY, USA. – 2004. – 564 pp.
13. Frenkel D. Understanding Molecular Simulation / Daan Frenkel, Berend Smith. – Computational Science Series Academic Press, San Diego. – 2002. – 658 pp.
14. Stukowski A. Visualization and analysis of atomistic simulation data with OVITO - the Open Visualization Tool / A. Stukowski // Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 18 .– 2010.

Стаття надійшла 03.04.2014
Прийнято до друку 06.05.2014

Аннотация

В.Н. Безпальчук

Моделирование влияния условий напыления на процесс фазообразования в системе Ni-Al методом молекулярной динамики.

В работе представлена компьютерная модель процесса напыления атомов никеля на поверхность нанопленки из атомов алюминия. Показано влияние начальных условий (температуры, плотности потока) на процесс напыления и формирования структур на контакте. Установлено, что в случае напыления при достаточно высокой температуре в зоне контакта возникает упорядоченная фаза с ОЦК решеткой, присутствие которой делает контактное плавление невозможным. Компьютерное моделирование было проведено с помощью классического метода молекулярной динамики с использованием EAM потенциала межатомного взаимодействия.

Ключевые слова: молекулярная динамика, система Ni-Al, напыление, твердый раствор, нанопленка, модель погружённого атома, радиальная функция распределения.

Summary

V.M. Bezpalchuk

MD study of deposition conditions effect on phase competition in Ni-Al reaction.

The paper presents a numeric model of the deposition by means of molecular dynamics simulations, using embedded-atom method (EAM) type potential. Simulation for Ni deposition on Al substrate and Al deposition on Ni substrate was investigated in this work. The state dependence of the contact zones of Ni and Al on the deposition conditions (temperature, flux density) are found. The influence of temperature on the deposition process and on structure formation at the contact is demonstrated. If the deposition proceeds under quite high temperature, the ordered phase with BCC-lattice appears in the very process of deposition. Its presence makes contact melting impossible.

Key words: molecular dynamics, Ni-Al system, deposition, solid solution, nanometric metallic layer, embedded atom model, radial distribution function.

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАСКАДНОГО ТЕРМО- ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО УСТРОЙСТВА В САПР КРИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предложен алгоритм расчета основных показателей каскадного термоэлектрического устройства в САПР критических систем на основании математической модели взаимосвязи основных теплофизических параметров с параметрами надежности. Применение разработанного алгоритма позволяет производить проектирование теплонагруженных средств с приоритетом по надежности.

Ключевые слова: проектирование, термоэлектрические устройства, надежность.

Введение

В современных условиях развития общества, когда информационные системы в значительной степени несут ответственность за предупреждение техногенных аварий и катастроф, надежность становится их основным показателем. Потребность в постоянном расширении функциональных возможностей, и связанное с этим усложнение аппаратной и программной частей, приводит к снижению показателей надежности систем.

Особенно остро проблема стоит в критических системах с теплонагруженными элементами, режим которых обеспечивается термоэлектрическими устройствами (ТЭУ), так как интенсивность отказов зависит от нагрузки и существенно превышает аналогичные параметры для нормальных условий эксплуатации. Без проведения надежно-ориентированного математического моделирования и анализа каскадных термоэлектрических устройств как таких, которые обеспечивают высокие показатели надежности, создание современных информационных теплонагруженных систем для сложных условий эксплуатации оказывается невозможным.

Решение этой проблемы лежит в области параметрического моделирования, моделирования управлением надежностью за счет аппаратной и информационной избыточности, реализация которых возможна только за счет применения систем автоматизированного проектирования.

Существующие исследования ограничиваются, в основном, характеристиками надежности в стандартных (паспортных) условиях эксплуатации, или представлены в литературных источниках методами совершенствования отдельных конструктивных параметров [1].

Анализ проведенных ранее исследований показал, что для теплонагруженных каскадных термоэлектрических устройств не существует четких моделей, позволяющих получать оптимизированные режимы при проектировании с точки зрения надежности их функционирования [2]. Все это делает процесс создания подсистем автоматизированного проектирования математического моделирования и анализа термоэлектрических устройств, работающих в теплонагруженных устройствах критических систем, достаточно актуальными.

Постановка задачи

Разработка подсистемы САПР теплонагруженных средств с каскадными термоэлектрическими охлаждающими устройствами (КТЭУ) связана с тем, что проектирование каскадных ТЭУ, как правило, ограничивается выбором

параметрических характеристик унифицированных модулей без учета связанных с параметрами надежности эксплуатационных характеристик, которые для теплонагруженных режимов становятся определяющими [3]. Проектирование каскадных ТЭУ, как правило, ограничивается выбором параметрических характеристик унифицированных модулей без учета связанных с параметрами надежности эксплуатационных характеристик, которые для теплонагруженных режимов становятся определяющими[4].

Ключевой проблемой является необходимость количественной оценки показателей надежности, поскольку только при выполнении этого условия возможно надежность-ориентированное проектирование.

Целью работы является разработка алгоритма расчета основных показателей каскадного ТЭУ на основе надежность-ориентированных математических моделей взаимосвязи основных показателей каскадных ТЭУ с показателями надежности, что обеспечит проектирование теплонагруженных электронных средств в подсистеме САПР с приоритетом по надежности.

Основная часть

В основу алгоритма расчета основных показателей каскадного ТЭУ в САПР критических систем, взята математическая модель взаимосвязи основных показателей надежности, которыми выбраны интенсивность отказов и вероятность безотказной работы, с основными параметрами двухкаскадного ТЭУ [5]. Применение такой математической модели в системе САПР критических систем позволяет получать количественные оценки параметров надежности двухкаскадных термоэлектрических устройств на стадии проектирования.

Основными параметрами двухкаскадного ТЭУ являются: относительные рабочие токи, перепад температур в каскадах, количество термоэлементов в каскадах, относительная тепловая нагрузка.

В модели приняты следующие ограничения, предполагалось: последовательное соединение термоэлементов в каскадах и самих каскадов; выход из строя любого термоэлемента приводит к выходу каскадного ТЭУ в целом; события выхода из строя элементов и интенсивность отказов одинаковые и независимые, не учитывается тепловое сопротивление сочленения каскадов и тепловая связь между термоэлементами; перепад температур двухкаскадного ТЭУ рассматривался в диапазоне от 60К до 90К.

Использованная математическая модель наибольшей энергетической эффективности, связывает основные параметры надежности двухкаскадного ТЭУ с относительными токами и перепадами температур и тепловой нагрузкой в режиме максимального холодильного коэффициента. Модель позволяет количественно оценивать показатели надежности двухкаскадного ТЭУ выбранной конструкции в режиме $E_{\max}$ в различных условиях эксплуатации при изменении относительных рабочих токов и тепловой нагрузки при заданном перепаде температур, а также проводить надежность-ориентированное проектирование теплонагруженных средств в режиме максимального холодильного коэффициента $E_{\max}$. Использование в алгоритме модели наименьшей величины интенсивности отказов двухкаскадных ТЭУ позволяет при выборе соотношения термоэлементов двухкаскадного ТЭУ ориентироваться на ту конструкцию, которая бы обеспечивала минимальную интенсивность отказов при заданных перепадах температур и тепловой нагрузке. При этом величина холодильного коэффициента стремилась к максимальному значению. Проведенный анализ

зависимости относительной интенсивности отказов от соотношения термоэлементов в каскадах для различных перепадов температур, описываемый аналитической зависимостью, позволяет проектировать двухкаскадные термоэлектрические устройства по условию, обеспечивающему наименьшую интенсивность отказа [6].

Разработанный алгоритм позволяет количественно оценивать также влияние величины тепловой нагрузки на основные показатели надежности при проектировании каскадных ТЭУ. Предложенная модель взаимосвязи основных показателей и показателей надежности двухкаскадных ТЭУ различных конструкций с величиной тепловой нагрузки. С ростом тепловой нагрузки C_1 величина относительной интенсивности отказов увеличивается при различных значениях отношения термоэлементов в каскадах и перепада температур ΔT . С ростом перепада температур ΔT величина относительной интенсивности отказов увеличивается при заданной тепловой нагрузке C_1 .

Применение надежно-ориентированных математических моделей взаимосвязи основных показателей каскадных ТЭУ с показателями надежности для различных режимов эксплуатации в алгоритме расчета показателей каскадных ТЭУ обеспечивает проектирование теплонагруженных электронных средств в подсистеме САПР с приоритетом по надежности (рис.1).

Для определения показателей надежности двухкаскадного ТЭУ необходимо определить следующие исходные данные, которые, как правило, оговорены техническим заданием:

Q_0 – требуемая холодопроизводительность, Вт;

T_0 – температура теплопоглощающего спая, К;

T_c – температура среды, К.

При определении требований возможны ограничения: по мощности потребления; по массогабаритным характеристикам; по величине интенсивности отказов; по величине рабочего тока и напряжения и т.д.

При выборе температуры на теплоотводящем спае (T) необходимо учитывать следующие условия теплообмена теплоотводящего радиатора ТЭУ со средой:

– при использовании принудительного воздушного конвективного теплообмена (использование вентилятора):

$$T = T_c + (3^0 \dots 5^0) K \quad (1)$$

– при использовании естественной конвекции:

$$T = T_c + (10^0 \dots 15^0) K \quad (2)$$

– при принудительном жидкостном конвективном теплообмене:

$$T = T_c + (1^0 \dots 2^0) K \quad (3)$$

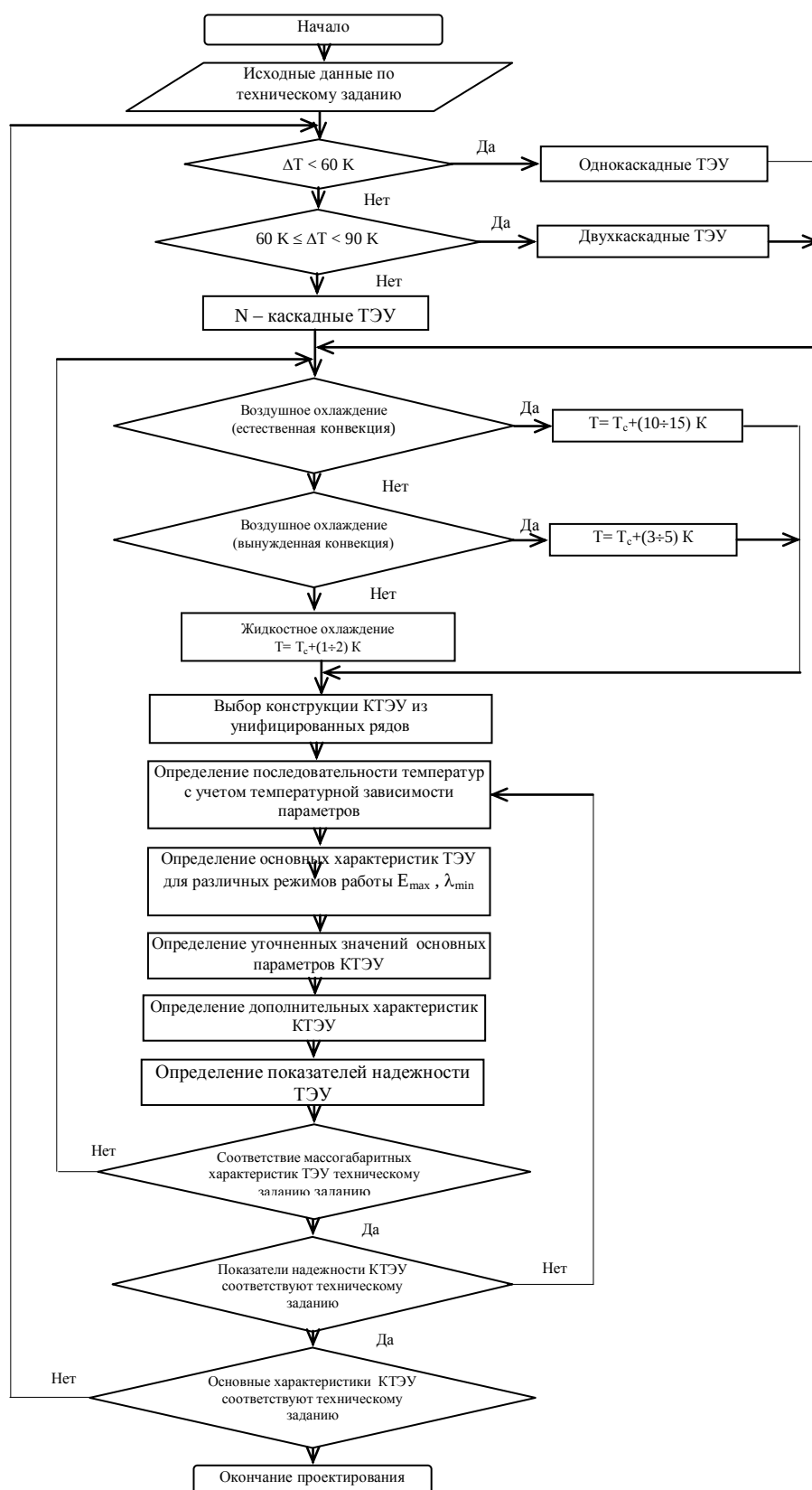


Рис. 1. Схема алгоритма расчета основных параметров каскадного ТЭУ.

Принимая во внимание выбранные исходные данные и условия теплообмена, осуществляем выбор из унифицированных рядов нескольких модулей ТЭУ. При перепаде температуры на ТЭУ $\Delta T = T - T_0$, если:

$\Delta T < 60K$ – используются однокаскадные ТЭУ;

$60K \leq \Delta T \leq 90K$ – используются двухкаскадные ТЭУ;

$90K < \Delta T < 100K$ – используются трехкаскадные ТЭУ, и т.д.

Максимальные охлаждающие возможности ТЭУ заданной конструкции можно оценить, определив максимальный перепад температуры ($\Delta T_{\max}$) и максимальную холодопроизводительность ($Q_{0\max}$) для различных соотношений количества термоэлементов в смежных каскадах $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$ и геометрии ветвей термоэлементов в каскадах $\frac{l}{s}$. При выполнении условий $\Delta T < \Delta T_{\max}$ и $Q_0 < Q_{0\max}$, выбраны несколько унифицированных конструкций ТЭУ.

На следующем этапе расчета оценим последовательность температур в каскадном ТЭУ с учетом температурной зависимости параметров: $e_i, \sigma_i, R_i, I_{\max_i}, \Delta T_{\max_i}$ в каскадах.

$$I_{\max_i} = \frac{e_i T_{i-1}}{R_i} \quad (4)$$

$$\Delta T_{\max_i} = 0,5 z_i T_{i-1}^2 \quad (5)$$

$$R_i = \frac{l}{\sigma_i s} \quad (6)$$

Определяем основные характеристики ТЭУ B_i и Q_i для различных режимов работы при последовательном электрическом соединении каскадов при заданных значениях $n_1, n_2, Q_0, \Delta T$:

– относительных рабочих токов B_1 и B_2 , путем решения полученных соотношений для каждого режима работы:

$$B = f\left(\frac{n_1}{n_2}; \Delta T; Q_{0\max}\right) \quad (7)$$

– относительных перепадов температур Θ_1 и Θ_2 в каскадах.

Используя метод последовательных приближений, уточняем последовательность температур, следовательно, и параметры $R_i, I_{\max_i}, \Delta T_{\max_i}$ с учетом температурной зависимости параметров и величины $B_1, B_2, \Theta_1, \Theta_2$ для каждого токового режима работы ТЭУ, где

$$Q_i = \frac{\Delta T_i}{\Delta T_{\max_i}} \quad (8)$$

Используя полученные уточненные значения основных параметров $B_1, B_2, \Theta_1, \Theta_2$ определяем режимы питания ТЭУ для расчета и конструирования блока питания и

теплоотводящего радиатора, которые позволяют определить массогабаритные размеры ТЭУ:

– рабочий ток:

$$I = B_1 I_{\max_1}; \quad (8)$$

– мощность потребления W_1 и W_2 в каскадах, где

$$W_i = 2n_i I_{\max_i}^2 l_i B_i \left(B_i + \frac{\Delta T_{\max_i}}{T_c} \Theta_i \right); \quad (9)$$

– суммарную мощность потребления:

$$W_{\Sigma} = W_1 + W_2; \quad (10)$$

– холодильный коэффициент термоэлектрического устройства:

$$E = \frac{Q_0}{W_{\Sigma}}; \quad (11)$$

– суммарное падение напряжения термоэлектрического устройства:

$$U_{\Sigma} = U_1 + U_2, \text{ где } U_i = \frac{W_i}{I}; \quad (12)$$

– количество тепла, которое необходимо отвести радиатором:

$$Q = Q_0 + W_{\Sigma}. \quad (13)$$

Определяем основные показатели надежности термоэлектрического устройства – интенсивность отказов λ (14) и вероятность безотказной работы P (15):

$$\frac{\lambda_{\Sigma}}{\lambda_0} = \frac{n_1 B_1^2 K_{T_1} \left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_{\max_1}} + C_1 \right) \left(\frac{\Delta T_1}{T_0} + B_1 \right)^2}{\left(1 + \frac{\Delta T_1}{T_0} \right)^2} + \frac{n_2 B_2^2 K_{T_2} \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_{\max_2}} + C_2 \right) \left(\frac{\Delta T_2}{T_1} + B_2 \right)^2}{\left(1 + \frac{\Delta T_2}{T_1} \right)^2} \quad (14)$$

$$P = e^{-\lambda_{\Sigma} t} \quad (15)$$

Производим анализ полученных основных параметров термоэлектрического устройства с ограничительными требованиями технического задания на проектирование. В случае не соответствия хотя бы одной из основных характеристик устройства с ограничениями, указанными в техническом задании следует откорректировать расчет с учетом возможности выполнения всех требований технического задания в их совокупности.

Выводы

На основании математических моделей взаимосвязи основных теплофизических параметров термоэлектрического устройства с показателями надежности – интенсивностью отказов и вероятностью безотказной работы, разработан алгоритм расчета, позволяющий производить надежно-ориентированное проектирование теплонагруженных средств в САПР критических систем. Предложенный алгоритм расчета реализует параметрическую модель в подсистеме САПР, которая обеспечивает получение количественных оценок показателей надежности в соответствии с техническим заданием на проектирование.

Литература

1. Шишмарев, В. Ю. Надежность технических систем [Текст] / В. Ю. Шишмарев. – М. : Академия, 2010. – 304 с.
2. Жаднов, В. В. Управление качеством при проектировании теплонагруженных радиоэлектронных средств [Текст] / В. В. Жаднов, А. В. Сарафанов. – М. : СОЛОН-Пресс, 2004. – 464 с.
3. Зайков, В. П. Возможности единого подхода к режимам работы охлаждающего термоэлемента [Текст] / В. П. Зайков, М. Н. Сомкин, А. А. Вайнер // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО, – 1984. – Вып. 1. – С. 95–106.
4. Анатичук Л.І., Кобилянський Р.Р. Комп'ютерне моделювання показів термоелектричного тепломіра в умовах реальної експлуатації // Термоелектрика. – № 1. – 2013. – с. 53-60.
5. Зайков, В. П. Прогнозирование показателей надежности информационных систем с термоэлектрическими устройствами [Текст] / В. П. Зайков, В. И. Мещеряков, А. А. Гнатовская // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Прикладные информационные технологии. 2/10 (50) – Харьков : Технологический центр, 2011. – С.37 – 43.
6. Зайков, В. П. Обеспечение наименьшей интенсивности отказов термоэлектрического устройства заданной конструкции [Текст] / В. П. Зайков, В. И. Мещеряков, А. А. Гнатовская // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ» – 2011. – № 23. – С. 76 –86.

Стаття надійшла 11. 04. 2014
Прийнято до друку 06. 05. 2014

Анотація

Г.А. Гнатовська

Алгоритм розрахунку показників каскадного термоелектричного пристрою у САПР критичних системах

Запропоновано алгоритм розрахунку основних показників каскадного термоелектричного пристрою в САПР критичних систем на основі математичної моделі взаємозв'язку основних теплофізичних параметрів з параметрами надійності. Основними показниками надійності каскадного термоелектричного пристрою обрані інтенсивність відмов і ймовірність безвідмовної роботи. Основними теплофізичними параметрами каскадного термоелектричного пристрою прийняті: відносні робочі струми, перепад температур, кількість термоелементів в каскадах, відносне теплове навантаження. Математична модель дозволяє кількісно оцінювати показники надійності каскадного термоелектричного пристрою, обраної конструкції в різних режимах експлуатації, з урахуванням впливу теплового навантаження. Необхідність кількісної оцінки показників надійності каскадного термоелектричного пристрою є ключовим завданням. Тільки при виконанні цього завдання можливе проведення надійнісно-орієнтованого проектування.

Застосування розробленого алгоритму дозволяє здійснювати проектування теплонавантажених засобів з пріоритетом по надійності.

Ключові слова: проектування, термоелектричні пристрої, надійність.

Summary

A.A. Gnatovskaya

The algorithm of calculating the cascade thermoelectric device in cad systems critical

The algorithm for the calculation of the main indicators of cascade thermoelectric device in CAD systems critical on the basis of a mathematical model of the relationship with the main thermal parameters of reliability parameters.

The main indicators of reliability cascade thermoelectric device selected failure rate and the probability of failure-free operation. The main thermal parameters of cascade thermoelectric device adopted: the relative operating currents, temperature and number of thermocouples in the Cascades, the relative heat load. Mathematical model to quantify the reliability of cascade thermoelectric device, the selected design in various modes of operation, taking into account the effect of the thermal load. The need for quantitative assessment of the reliability of cascade thermoelectric device is a key task. Only under this condition may conduct of reliability-oriented design.

The application of this algorithm allows for the design of thermally loaded funds with a priority on safety.

Key words: design, thermoelectric device, reliability.

УДК 536.24

Б.П. Головня, В.В. Хайдуров

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Обратные задачи теплопроводности (ОЗТ) возникают в различных отраслях науки и техники. Известно, что подобные задачи очень ресурсоемки, т.е. их решение требует проведения очень больших вычислений. В данной статье предложена серия методов, позволяющих сократить время численного решения некоторых нелинейных обратных задач теплопроводности.

Ключевые слова: обратная задача теплопроводности (ОЗТ), численное решение ОЗТ.

Вступление

Многие важные вопросы теплообмена сводятся к решению обратных задач. Под обратными задачами здесь понимается следующее. Для решения стационарной или нестационарной стандартной задачи теплообмена требуется задать начальные условия, краевые условия, физические параметры среды и т.д. Имея в своем распоряжении все необходимые величины, мы можем рассчитать температурное поле в исследуемой области. Такая задача называется прямой. Но возможна и другая ситуация. Мы знаем это температурное поле, но не знаем значений некоторых определяющих параметров. В этом случае требуется по температурному полю и известным значениям части определяющих параметров восстановить значения неопределенных параметров. Такие задачи называются обратными задачами теплопроводности или ОЗТ.

Например. В нестационарной задаче требуется по температурному полю, измеренному через известное время после начала эксперимента, найти начальные условия. Или. По стационарному температурному полю требуется найти недостающие краевые условия.

Опыт показывает, что ОЗТ являются очень ресурсоемкими задачами, их решение требует больших вычислительных мощностей и значительного процессорного времени. Данная работа посвящена исследованию возможных путей ускорения решения ОЗТ.

Цель работы

Разработка и апробация методов, ускоряющих решение некоторых нелинейных обратных задач теплопроводности.

Математическая постановка задачи

В области $D \times [0, \tau]$ рассматривается уравнение теплопроводности:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \nabla T) \quad (1)$$

Полное решение задачи теплопроводности в заданной области содержит:

1) Значение температуры во всех внутренних точках области, т.е. $\forall x \in D, \forall t \in [0, \tau]$ известно $T(x, t)$. В частности, нам известно следующее:

1а) Начальное распределение температуры $T_{init}(x) = T(x, 0)$.

1б) Конечное $T_{fin}(x) = T(x, \tau)$ распределение температуры.

2) Краевые условия: $\partial D = \partial D_D + \partial D_N$, $x \in \partial D_D : T = T(x, \tau)$; $x \in \partial D_N : \partial T / \partial n = p(x, \tau)$. Здесь ∂D - граница области, ∂D_D - часть границы (возможно, пустая), на которой задано условие Дирихле и ∂D_N - часть границы, на которой задано условие Неймана, n - нормаль к границе области.

3) Зависимость параметров задачи от координат и температуры: $\rho = \rho(x, T)$, $C = C(x, T)$, $k = k(x, T)$.

В этом случае прямая задача теплопроводности формулируется следующим образом:

Дано уравнение (1), начальное распределение температуры 1а), краевые условия 2), зависимости параметров от координат и температуры 3).

Требуется найти конечное значение температуры 1б) и, как промежуточный результат, значения температуры во всех внутренних точках области 1) для $\forall t \in [0, \tau]$.

В данной работе рассматривается следующая частная постановка ОЗТ. Дано уравнение (1), конечное распределение температуры 1б), краевые условия 2), зависимости параметров от координат и температуры 3). Требуется найти начальное значение температуры 1а) и, как промежуточный результат, значения температуры во всех внутренних точках области 1) для $\forall t \in [0, \tau]$.

Т.е., ОЗТ считается решенной, если найдено такое начальное распределение температуры $\overline{T_{init}}(x) = \overline{T}(x, 0)$, что решение прямой задачи с использованием в качестве начальных условий этого распределения $T(\overline{T_{init}})$ совпадает с требуемым конечным распределением T_{fin} .

Иначе, требуется найти начальное распределение температуры $\overline{T_{init}}$ такое, что

$$J(\overline{T_{init}}) = \|T(\overline{T_{init}}) - T_{fin}\| \rightarrow \min \quad (2)$$

В качестве нормы в (2) будет использоваться норма L_2 , т.е. $\|x\| = \int_D x^2 dD$ или, в дискретном случае, $\|x\| = \sum x_i^2$.

Ясно, что для заданного начального распределения T_{init} значения $T(T_{init})$ получаются в результате решения дифференциального уравнения (1). Для сокращения записей введем для уравнения (1) обозначение (3). Здесь подчеркивается, что решение получено с начальными условиями $T(x, 0) = T_{init}(x)$.

$$L(T, T_{init}) = 0 \quad (3)$$

Можно сказать, что дифференциальное уравнение (3) выступает в задаче (2) в роли ограничения. Т.е., согласно современной классификации, мы имеем задачу поиска минимума функционала (2) с ограничением в виде дифференциального уравнения (3). Как правило, задачи поиска экстремума с ограничениями записываются с использованием множителей Лагранжа, т.е. задача ставится в виде задачи на безусловный экстремум

$$\int_D (T(T_{init}) - T_{fin})^2 dD + \lambda L(T, T_{init}) \rightarrow \min.$$

Но, в связи с тем, что мы минимизируем квадратичный функционал (2), от использования множителей Лагранжа было решено отказаться.

Окончательно. Требуется найти начальное распределение температуры $\overline{T_{init}}$ такое, что распределение температуры $T(\overline{T_{init}})$ доставляет минимум функционалу

$$J(T_{init}) = \int_D (T(T_{init}) - T_{fin})^2 dD \rightarrow \min, \quad (4)$$

причем для любых начальных условий T_{init} значения $T(T_{init})$ находится в результате решения дифференциального уравнения (3).

Методика решения

Задача (4), (3) будет решаться численно, конечно-разностными методами. Это значит, что искомое начальное распределение температуры описывается значениями температуры в узлах сетки, т.е. представляет собой достаточно большой массив чисел. Отсюда следует, что мы имеем задачу минимизации, зависящую от большого числа определяющих параметров. Кроме того, поиск значения минимизируемой функции требует решения дифференциального уравнения. Все это обуславливает очень большую ресурсоемкость данной задачи. Т.е. оптимизация методики решения – это не искусственная, а, в самом деле, актуальная задача. Очевидный критерий оптимизации – минимум числа расчетов значений минимизируемой функции.

Будем минимизировать функционал (4)

а) методом спуска,

б) решая систему уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial (T_i)_{init}} = 0. \quad (5)$$

Система (5) будет решаться методом Ньютона или какой-либо его модификацией. Здесь $(T_i)_{init}$ - значения искомого начального распределения температуры в узлах расчетной сетки, т.е. значения определяющих параметров задачи.

Тогда задачу оптимизации можно поставить следующим образом - среди существующих методов спуска и методов типа Ньютона выбрать наиболее соответствующие особенностям решаемой задачи и, если возможно, сократить в них количество вызовов функции а также построить достаточно хорошие начальные условия для задачи минимизации.

Методы спуска. Построение начальных условий

Этот прием хорошо работает, если для прямой задачи теплопроводности несложно получить аналитическое решение. Рассмотрим на простейшем примере. Решается прямая задача теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(0) = T(\pi) = 0$$

Методом разделения переменных находим решение задачи

$$T(x, \tau) = \sum C_k e^{-k^2 \tau} \sin(kx) + x/\pi$$

Отсюда следует, что в начальный момент времени

$$T(x, 0) = \sum C_k \sin(kx) + x/\pi.$$

Т.е. начальные условия можно получить следующим образом. Решение T_{fin} раскладываем в ряд Фурье. $T_{fin}(x) = \sum C_{k_{fin}} \sin(kx) + a$. Мы знаем, что это решение получено в момент времени $t = \tau$. Но тогда из общего решения следует, что $C_{k_{fin}} = C_k e^{-k^2 \tau}$ и начальное решение элементарно восстанавливается. Так как мы использовали отсечение ряда Фурье при разложении T_{fin} , то мы получаем не точное начальное условие, но достаточно хорошее его начальное приближение. Значит, итерационное уточнение сойдется значительно быстрее. Если в исследуемой области разложение в ряд Фурье построить сложно и/или задача нелинейная, заменяем область чем-либо подходящим, например, прямоугольником, кругом, кольцом и т.д., отбрасываем нелинейности и повторяем процедуру. В любом случае полученное начальное приближение будет заметно лучше, чем обычные нулевые начальные условия. После того, как было получено хорошее приближение к начальному условию, можно проводить его уточнение любым градиентным методом, к примеру, методом скорейшего спуска.

Рассмотрим пример. Пусть $f(x) \rightarrow \min, x \in R$. Применим к задаче безусловной оптимизации метод скорейшего спуска. За направление спуска можно взять движение в направлении антиградиента, например, следующим образом:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k f'(x^{(k)}), \quad h_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

Задача состоит в том, чтобы найти на каждом шагу такое значение h_k , которое минимизирует функцию при некотором значении $x^{(k)}$, взятого из предыдущей итерации. Поиск такого значения h_k может быть реализован с помощью разных методов одномерной безусловной оптимизации.

Значение параметра $h_k \in R^1$ берется из условия минимума функции $f(x)$ в направлении движения антиградиента:

$$f(x^{(k)} - h_k f'(x^{(k)})) = \min f(x^{(k)} - h f'(x^{(k)})), \quad h > 0.$$

На основании одномерного случая, можно записать итерационную формулу для минимизации функционала типа (4):

$$J(T_{init}^{(k)} - h_k J'(T_{init}^{(k)})) = \min J(T_{init}^{(k)} - h \cdot J'(T_{init}^{(k)})), \quad h > 0.$$

Таким образом, используя приближение к начальному условию, его можно уточнить, используя метод скорейшего спуска.

Методы типа Ньютона

Методы этого типа заменяют решение системы уравнений вида $F_i(\vec{x}) = F_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ решением последовательности линейных систем вида:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{x}^k) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{x}^k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\vec{x}^k) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\vec{x}^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} - x_1^k \\ \vdots \\ x_n^{k+1} - x_n^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}^k) \\ \vdots \\ F_n(\vec{x}^k) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Напомним, что нам надо решать систему вида (5), где в качестве неизвестных выступают значения начальных условий в узлах сетки. В результате, в качестве матрицы системы у нас будет использоваться гессиан исходной системы, т.е. матрица, состоящая из вторых производных системы.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J_1}{\partial T_{init_1}^2}(T_{init}^k) & \dots & \frac{\partial^2 J_1}{\partial T_{init_1} \partial T_{init_n}}(T_{init}^k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 J_n}{\partial T_{init_n} \partial T_{init_1}}(T_{init}^k) & \dots & \frac{\partial^2 J_n}{\partial T_{init_n}^2}(T_{init}^k) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Так как, рассчитывая гессиан, мы дифференцируем решение по начальным условиям, то, в общем случае, найти производную аналитически невозможно. Значит, мы вынуждены брать ее численно. При численном поиске второй производной по одной переменной мы должны иметь значения дифференцируемой функции в трех точках, а при поиске смешанной производной – в четырех. При решении одного уравнения, учитывая, что смешанных производных здесь нет, с этой задачей можно легко справиться. Здесь для расчета производной используют три найденных подряд значения функции, задающей уравнение $F(x)=0$. Но, при решении систем уравнений этот прием не проходит. Мы вынуждены рассчитывать значения функции специально. Но одно значение функции мы получаем, решив дифференциальное уравнение (3). Следовательно, учитывая симметричность матрицы (7), для проведения одного шага метода Ньютона нам необходимо решить дифференциальное уравнение $O(n^2)$ раз, где n - количество внутренних узлов сетки дискретного аналога уравнения вида (1).

Сначала рассмотрим простейший случай. Предположим, что нужно решить нелинейное уравнение вида $F(x)=0$. Классический метод Ньютона, решающий эту задачу, имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}. \quad (8)$$

Повысить точность метода (8) можно на основе следующего подхода. Пусть нужно решить дифференциальное уравнение вида $y' = f(x)$. Интегрируя обе его части, получим выражение:

$$\left\{ \int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \right\} = \left\{ y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \right\} = \left\{ y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x) dx \right\} \quad (9)$$

Ясно, что взятие интеграла тесно связано с точностью расчетов. Используя формулу правых прямоугольников, уравнение (9) можно переписать следующим образом:

$$\left\{ y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x) dx \right\} = \{ y_{k+1} = y_k + hy'(x_k) \} = \{ y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k) y'(x_k) \}. \quad (10)$$

Данные преобразования сводятся к классическому методу Ньютона, если положить $y_{k+1} = 0$ и решить уравнение относительно x_{k+1} . Известно, что точность одного шага метода ломаных $O(h^2)$. Аналогичную точность вычислений имеет и классический метод Ньютона. Повысить точность одного шага решения уравнения можно, используя метод предиктор-корректор. При взятии интеграла методом трапеций будем иметь:

$$\left\{ y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x) dx \right\} = \{ y_{k+1} = y_k + 0.5h(y'(x_k) + y'(x_{k+1})) \} \\ \{ y_{k+1} = y_k + 0.5(x_{k+1} - x_k)(y'(x_k) + y'(x_{k+1})) \} \quad (11)$$

В последнем выражении нам значение $y'(x_{k+1})$ неизвестно, поэтому для него строится оценка. Оценку можно проводить на основании метода ломаных следующим образом:

$$z = x_k - \beta \frac{y_k}{y'_k}, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{2y_k}{y'(x_k) + y'(z)}. \quad (12)$$

Одним из популярных вариантов (12) есть использование $\beta=1$.

Также можно предложить методы, у которых в правиле трапеций берется не среднее арифметическое значений на концах, а среднее геометрическое. Получим следующие выражения:

$$\left\{ y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x) dx \right\} = \left\{ y_{k+1} = y_k + h \frac{(y'(x_k)y'(x_{k+1}))}{0.5(y'(x_k) + y'(x_{k+1}))} \right\}. \quad (13)$$

Аналогичным образом проводим оценку для неизвестного значения в (13) для $y'(x_{k+1})$. В результате имеем:

$$z = x_k - \beta \frac{y_k}{y'_k}, \quad (14)$$

$$x_{k+1} = x_k - y_k \frac{(y'(x_k) + y'(z))}{2y'(x_k)y'(z)}.$$

Еще один вариант, основанный на правиле средних, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \left\{ y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x) dx \right\} &= \left\{ y_{k+1} = y_k + hy' \left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right) \right\} = \\ &= \left\{ y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k) y' \left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

В (15) присутствует множитель, который также как и в предыдущих выражениях требует проведения оценки. В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} z &= x_k - \beta \frac{y_k}{y'_k}, \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{y_k}{y' \left(\frac{x_k + z}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Очевидно, что последний метод имеет третий порядок точности вычислений.

При решении рассмотренного класса задач, как уже говорилось, производные функционала по каждому его параметру надо задавать численно, поскольку решение подобных задач могут быть получены только численно, т.е. в виде таблицы значений. Перед тем, как записать формулы для вышерассмотренных методов (12), (14) и (16) запишем сначала классический метод Ньютона для поставленной ОЗТ.

$$\begin{aligned} G^k \Delta \theta^k &= -R^k \\ \theta^{k+1} &= \theta^k + \Delta \theta^k, \end{aligned} \quad (17)$$

где $G = (G_{ij}) = (\partial^2 J / \partial \theta_i \partial \theta_j)$ – матрица Гессе, $\Delta \theta = (\Delta \theta_1, \dots, \Delta \theta_n)^T$ – вектор-столбец приращений параметров, $R = (R_1, \dots, R_n)^T = (\partial J / \partial \theta_1, \dots, \partial J / \partial \theta_n)^T$ – вектор-столбец производных целевого функционала.

Использование методов (12), (14) и (16) для модификации метода (17) ведет к следующим методам. Напоминаем, что мы решаем ОЗТ, которая сводится к нахождению минимума функционала типа (4).

В данном случае формулы метода (12) для минимизации функционала типа (4) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}(\bar{\theta}^{(k)}) J(\bar{\theta}^{(k)}) \\ \bar{\theta}^{(k+1)} &= \bar{\theta}^{(k)} - 2 \cdot \left(H(\bar{\theta}^{(k)}) + H(\bar{z}) \right)^{-1} J(\bar{\theta}^{(k)}). \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогичным образом формулы метода (14) решения нелинейной ОЗТ можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}(\bar{\theta}^{(k)}) J(\bar{\theta}^{(k)}) \\ \bar{\theta}^{(k+1)} &= \bar{\theta}^{(k)} - \frac{1}{2} \cdot \left(H(\bar{\theta}^{(k)}) \cdot H(\bar{z}) \right)^{-1} \left(H(\bar{\theta}^{(k)}) + H(\bar{z}) \right) J(\bar{\theta}^{(k)})\end{aligned}\quad (19)$$

Формулы метода (16) для поставленной задачи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}(\bar{\theta}^{(k)}) J(\bar{\theta}^{(k)}), \\ \bar{\theta}^{(k+1)} &= \bar{\theta}^{(k)} - H^{-1} \left(\frac{\bar{\theta}^{(k)} + \bar{z}}{2} \right) J(\bar{\theta}^{(k)}).\end{aligned}\quad (20)$$

$\bar{\theta}^{(k)}$ - вектор неизвестных задачи на k -ой итерации, H - матрица Гессе. Нужно отметить, что метод (20) имеет третий порядок точности.

Можно попробовать ускорить методы (18), (19), (20), используя для нахождения вектора $\bar{\theta}^{(k+1)}$ метод скорейшего спуска.

Тогда формулировку метода (18) можно окончательно записать в виде:

$$\begin{aligned}J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta_k J'(\bar{\theta}^{(k)})) &= \min J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot J'(\bar{\theta}^{(k)})), \beta > 0, \\ \bar{z} &= \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}(\bar{\theta}^{(k)}) J(\bar{\theta}^{(k)}), \\ J(\bar{z} - h_k J'(\bar{z})) &= \min J(\bar{z} - h \cdot J'(\bar{z})), h > 0, \\ \bar{\theta}^{(k+1)} &= \bar{\theta}^{(k)} - 2h_k \cdot \left(H(\bar{\theta}^{(k)}) + H(\bar{z}) \right)^{-1} J(\bar{\theta}^{(k)}).\end{aligned}\quad (21)$$

Формулировку метода (19) можно окончательно записать в виде:

$$\begin{aligned}J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta_k J'(\bar{\theta}^{(k)})) &= \min J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot J'(\bar{\theta}^{(k)})), \beta > 0, \\ \bar{z} &= \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}(\bar{\theta}^{(k)}) J(\bar{\theta}^{(k)}), \\ J(\bar{z} - h_k J'(\bar{z})) &= \min J(\bar{z} - h \cdot J'(\bar{z})), h > 0, \\ \bar{\theta}^{(k+1)} &= \bar{\theta}^{(k)} - \frac{h_k}{2} \cdot \left(H(\bar{\theta}^{(k)}) \cdot H(\bar{z}) \right)^{-1} \left(H(\bar{\theta}^{(k)}) + H(\bar{z}) \right) J(\bar{\theta}^{(k)}).\end{aligned}\quad (22)$$

Аналогично, формулировка метода (20) по отношению к поставленной задаче будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta_k J'(\bar{\theta}^{(k)})) &= \min J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot J'(\bar{\theta}^{(k)})), \beta > 0, \\ \bar{z} &= \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}(\bar{\theta}^{(k)}) J(\bar{\theta}^{(k)}), \\ J(\bar{z} - h_k J'(\bar{z})) &= \min J(\bar{z} - h \cdot J'(\bar{z})), h > 0, \\ \bar{\theta}^{(k+1)} &= \bar{\theta}^{(k)} - h_k H^{-1} \left(\frac{\bar{\theta}^{(k)} + \bar{z}}{2} \right) J(\bar{\theta}^{(k)}).\end{aligned}\quad (23)$$

Очевидно, что при решении поставленной задачи классическим методом Ньютона, нужно сначала найти градиент функционала (4). Для этого нужно найти численные решения $2n$ ПЗТ, где n - количество параметров. При вычислении каждого недиагонального элемента матрицы Гессе нужно решить еще $4n$ ПЗТ. Учитывая симметричность матрицы Гессе, количество решений ПЗТ на один шаг классического метода Ньютона будет равно:

$$N_f = 1 + 4(1 + 2 + \dots + n) + 2n = 1 + 2n(n + 1) + 2n = 2n^2 + 4n + 1.$$

Видно, что количество вызовов процедуры решения ПЗТ на один шаг решения ОЗТ классическим методом Ньютона имеет квадратичную зависимость. Здесь также возможны ускорения.

Тестирование разработанных методов проводилось на ряде задач. Некоторые из них приведены ниже.

Первая задача имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho(T)C(T)\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right), \\ \rho(T) &= 1 + 0.15T + 0.25T^2, \quad C(T) = 0.25T^2 - 0.01T + 0.15. \\ T(x, 0, t) &= 0.5e^{\sin(\pi(0.5-x)+0.5\pi)}, \quad T(x, 1, t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-x)-0.5\pi)}, \\ T(0, y, t) &= 0.5e^{\sin(\pi(0.5-y)+0.5\pi)}, \quad T(1, y, t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-y)-0.5\pi)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Начальное условие, которое ищется как решение ОЗТ: $T(x, y, 0) = 0.5 + \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$.

Вторая задача имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho(T)C(T)\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right), \\ \rho(T) &= \frac{1+T+2T^2}{10}, \quad C(T) = 0.5 + (0.1-T)^2, \\ T(x, 0, t) &= 0.5e^{\sin(\pi(0.5-x)+0.5\pi)}, \quad T(x, 1, t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-x)-0.5\pi)}, \\ T(0, y, t) &= 0.5e^{\sin(\pi(0.5-y)+0.5\pi)}, \quad T(1, y, t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-y)-0.5\pi)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Начальное условие: $T(x, y, 0) = 0.5 + xy(1-x)^2(1-y)^2$.

Третья задача:

$$\begin{aligned} \rho(T)C(T)\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) \\ \rho(T) &= 1 - 0.05T + 0.55T^2, \quad C(T) = 0.5 + T(0.1-T)^2. \\ T(x, 0, t) &= 0.5e^{\sin(\pi(0.5-x)+0.5\pi)}, \quad T(x, 1, t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-x)-0.5\pi)}, \\ T(0, y, t) &= 0.5e^{\sin(\pi(0.5-y)+0.5\pi)}, \quad T(1, y, t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-y)-0.5\pi)}, \end{aligned} \quad (26)$$

Начальное условие: $T(x, y, 0) = 0.5 + xy(1-x)^4(1-y)^3$.

Тестирование двух классических и трех разработанных методов (21), (22) и (23) было проведено на нелинейных задачах (24), (25) и (26). Задачи (24)–(26) были решены на сетках разной размерности. Ниже приведены результаты расчетов всех рассмотренных методов без построения приближения к начальному условию (таблицы 1–2) и с построением приближения к начальному условию с применением метода Фурье. При проверке эффективности подхода использовались 4 члена разложения. Точность расчетов во всех методах на разных сетках $\epsilon_{ps} = 10^{-7}$. В каждом случае при решении данных нелинейных задач больше всего вызовов функции имеет метод скорейшего спуска. Для каждой задачи число вызовов функции при решении данным методом будет браться за 100%. Количества вызовов функции, которые были получены другими методами, будут пересчитаны относительно метода скорейшего спуска.

Таблица 1

Результаты работы разработанных методов на сетке 30x30 без применения метода Фурье для построения приближения к начальному условию.

Точность вычислений $\epsilon_{ps} = 10^{-7}$

	Задача 1 (24)	Задача 2 (25)	Задача 3 (26)
Метод скорейшего спуска	350 итераций / 10718750 вызовов функции (100%)	387 итераций / 9660100 вызовов функции (100%)	431 итерация / 10007873 вызова функции (100%)
Классический метод Ньютона	15 итераций / 56,67%	18 итераций / 75,47%	15 итераций / 60,70%
Первая модификация метода Ньютона (21)	7 итераций / 26,45%	7 итераций / 29,35%	6 итераций / 25,98%
Вторая модификация метода Ньютона (22)	8 итераций / 30,23%	6 итераций / 25,16%	6 итераций / 24,28%
Третья модификация метода Ньютона (23)	5 итераций / 18,89%	6 итераций / 25,16%	4 итерации / 10,11%

Таблица 2

Результаты работы разработанных методов на сетке 45x45 без применения метода Фурье для построения приближения к начальному условию.

Точность вычислений $\epsilon_{ps} = 10^{-7}$

	Задача 1 (24)	Задача 2 (25)	Задача 3 (26)
Метод скорейшего спуска	421 итерация / 12893125 вызовов функции (100%)	415 итераций / 12480749 вызовов функции (100%)	461 итерация / 10704476 вызова функции (100%)
Классический метод Ньютона	18 итераций / 30,65%	22 итерации / 35,24%	15 итераций / 27,28%
Первая модификация метода Ньютона (21)	10 итераций / 36,23%	8 итераций / 35,71%	7 итераций / 32,17%
Вторая модификация метода Ньютона (22)	8 итераций / 28,31%	6 итераций / 33,75%	6 итераций / 33,75%
Третья модификация метода Ньютона (23)	5 итераций / 25,32%	6 итераций / 19,98%	4 итерации / 17,85%

Теперь покажем в табличном виде результаты всех рассмотренных методов, перед использованием которых была сделана процедура построения хорошего приближения к начальному условию задач на основании метода Фурье. При построении начальных условий использовались 4 члена разложения.

Таблиця 3

Результаты работы разработанных методов на сетке 30x30
(с применением метода Фурье).

Точность вычислений $\epsilon_{ps} = 10^{-7}$

	Задача 1 (24)	Задача 2 (25)	Задача 3 (26)
Метод скорейшего спуска	153 итерации / 1451850 вызовов функции (100%)	235 итераций / 31566601 вызовов функции (100%)	271 итерация / 40153473 вызова функции (100%)
Классический метод Ньютона	12 итераций / 15,12%	13 итераций / 17,15%	12 итераций / 15,53%
Первая модификация метода Ньютона (21)	7 итераций / 10,11%	7 итераций / 10,11%	4 итерации / 7,72%
Вторая модификация метода Ньютона (22)	8 итераций / 12,82%	5 итераций / 9,71%	6 итераций / 10,82%
Третья модификация метода Ньютона (23)	5 итераций / 8,85%	6 итераций / 10,82%	4 итерации / 7,22%

Таблиця 4

Результаты работы разработанных методов на сетке 45x45 без применения метода Фурье для построения приближения к начальному условию.

Точность вычислений $\epsilon_{ps} = 10^{-7}$

	Задача 1 (24)	Задача 2 (25)	Задача 3 (26)
Метод скорейшего спуска	193 итерации / 1821805 вызовов функции (100%)	298 итераций / 3656021 вызовов функции (100%)	3251 итераций / 40153473 вызова функции (100%)
Классический метод Ньютона	12 итераций / 15,12%	16 итераций / 21,51%	13 итераций / 17,83%
Первая модификация метода Ньютона (21)	7 итераций / 10,11%	9 итераций / 15,31%	5 итераций / 8,33%
Вторая модификация метода Ньютона (22)	9 итераций / 16,35%	7 итераций / 12,11%	8 итераций / 15,28%
Третья модификация метода Ньютона (23)	5 итераций / 8,85%	6 итераций / 10,82%	4 итерации / 6,35%

Выводы

Разработанные методы эффективно решают нелинейные ОЗТ по восстановлению начальных условий. Тестирование этих методов было выполнено на различных двумерных задачах. Сходимость результатов достаточно хорошая. Показано заметное ускорение расчетов по сравнению с классическими методами.

Литература

1. Klivanov M.V. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problem. / M.V. Klivanov, L. Beilina. – USA.: Springer, 2012. – 407p. ISBN 978-1-4419-7804-2.
2. Isakov V., Inverse Problems for Partial Differential Equations. / V. Isakov. – USA.: Springer, 2005 – 40p.

Стаття надійшла 15.04.2014
Прийнято до друку 06.05.2014

Анотація

Б.П. Головня, В.В. Хайдуров

Ефективні методи розв'язання нелінійних обернених задач теплопровідності

Зворотні задачі теплопровідності (ЗЗТ) виникають в різних галузях науки і техніки. Відомо, що подібні завдання дуже ресурсномісткі, тобто їх рішення вимагає проведення дуже великих обчислень. У роботі розроблена серія методів чисельного рішення нелінійних обернених задач теплопровідності з відновлення початкової умови. Описана методика побудови початкових умов, що дозволяє помітно скоротити обсяг обчислень. Тестування розглянутих методів показало їх високу ефективність при вирішенні обернених задач даного класу.

Ключові слова: зворотна задача теплопровідності (ЗЗТ), чисельне рішення ЗЗТ.

Summary

B.P. Golovnya, V.V. Haydurov

Effective method for solving nonlinear inverse heat conduction problem

In this paper we developed a series of methods for the numerical solution of nonlinear inverse heat conduction problems to restore the initial condition. Methodology on the base of that the good approaching is built to the initial condition is also described, that in times abbreviates the amount of calculations to the receipt of numeral decision of certain task with the set exactness. Calculable optimization of each is conducted of the considered methods on the amount of calls of function. Testing of the considered methods is conducted. All methods showed high efficiency at the decision of reverse tasks of this class.

Key words: inverse heat conduction problem, the numerical solution of inverse heat conduction problem.

СЕКЦІЯ «ІНФОРМАТИКА»

УДК 004.891.2:519.85

Ю.В. Триус, М.О. Манько

WEB-ОРІЄНТОВАНА КОНСУЛЬТАЦІЙНА ЕКСПЕРТНА СИСТЕМА З
МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ

Метою дослідження є створення web-орієнтованої консультативної експертної системи з методів оптимізації на основі принципів хмарних технологій. Завданням дослідження є проектування та розробка експертної системи на основі продукційної моделі подання знань про предметну область. Результатом дослідження є створена на основі правил продукції база знань про задачі оптимізації, методи і засоби їх розв'язування, а також розроблена експертна система з методів оптимізації з використанням web-орієнтованої експертної оболонки eXpertise2Go.

Ключові слова: експертна система, задачі оптимізації, методи оптимізації, web-орієнтовані технології.

Постановка проблеми

Діяльність людини при вирішенні різноманітних виробничих, соціальних, технічних і багатьох інших проблем майже завжди спрямована на відшукування найкращого (оптимального) рішення.

Щоб знайти найкращу з можливостей, доводиться розв'язувати задачі на знаходження найбільших чи найменших значень певних величин за наявності або відсутності обмежень на параметри, від яких вони залежать, тобто екстремальні задачі. Дослідження різних типів екстремальних задач і розробка методів їх розв'язування складають основу теорії оптимізації.

Актуальність і доцільність вивчення курсу з теорії і методів оптимізації у ВНЗ студентами математичних, комп'ютерних, технічних та економічних спеціальностей обумовлена, по-перше, важливістю цих задач для різних сфер діяльності людини, по-друге, тим, що теорія оптимізації є сьогодні одним з пріоритетних напрямів науково-дослідної роботи в галузі математики та інформатики, по-третє, тим, що світовий досвід показує – при вдосконаленні технологічних процесів найбільш перспективним є використання оптимізуючих систем, заснованих на знаннях і досвіді висококваліфікованих фахівців, які накопичуються в базах знань експертних систем.

Тому у навчальних планах багатьох напрямів підготовки у ВНЗ не випадково передбачено вивчення теорії і методів оптимізації. Так студенти, що навчаються за освітніми напрямами: «математика», «прикладна математика», «системний аналіз», «комп'ютерні науки», «програмна інженерія», «комп'ютерна інженерія», вивчають такі нормативні дисципліни, як «Методи оптимізації», «Методи оптимізації та дослідження операцій», «Математичні методи дослідження операцій», а студенти напряму підготовки «економіка і підприємництво» знайомляться з методами оптимізації у дисципліні «Економіко-математичне моделювання». Під час вивчення зазначених дисциплін у студентів виникають проблеми при розв'язуванні навчальних і реальних задач оптимізації як на етапі класифікації математичної моделі задачі, так і при виборі методів та засобів її розв'язування. Це пов'язано з тим, що існує велика кількість різних класів оптимізаційних задач, кожен з цих класів задач, як правило, має кілька альтернативних методів їх розв'язування, і, крім того, існує значна кількість

програмних засобів, що реалізують ці методи. Як зазначено в роботі [1, с. 10] «...у дракона оптимізації багато голів і проти кожної з них потрібен свій меч». У такій ситуації виникає необхідність у консультації студента з викладачем відповідної дисципліни. Але часто виникають обставини коли, з тих чи інших причин, проконсультуватись з питань, що виникли, в реальному часі немає можливості. Іноді допомогти вирішити поставлену задачу може пошук у мережі Internet, якщо потрапити на ресурс, що містить розв'язок аналогічної задачі, або хтось в мережі підкаже, де знайти такий ресурс.

Одним з шляхів вирішення окресленої актуальної проблеми, і не лише для студентів, що вивчають теорію і методи оптимізації у ВНЗ, а також для аналітиків і логістів фірм, компаній і підприємств, які використовують наукові підходи і методи оптимізації для вирішення виробничих задач, є створення web-орієнтованої експертної системи з методів оптимізації, призначеної для консультування користувачів щодо методів і засобів розв'язання задач оптимізації, в результаті чого вони б отримали розгорнуту відповідь на питання, що їх цікавлять.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Експертні системи (ЕС) – важлива прикладна галузь штучного інтелекту. В даний час у США, Німеччині, Японії та інших розвинених країнах розроблені і діють сотні систем підтримки прийняття рішень інтелектуального типу, що базуються на ЕС, в різних галузях діяльності людини: медицині, будівництві, бізнесі, екології, запобіганні та ліквідації наслідків надзвичайних ситуацій, наукових дослідженнях та ін. (див., наприклад, [2]-[4]).

Найбільш поширеними є експертні системи продукційного типу, до яких відносяться більшість діагностичних, планувальних та консультаційних експертних систем. Останнім часом такого роду ЕС почали створювати у ВНЗ, зокрема для навчальних цілей, при цьому широко використовуються Internet-технології.

У Новосибірському державному технічному університеті створено експертну оболонку W.E.S.T. (World Expert System Toolkit), розроблену для розміщення та використання експертних систем у WWW. Експертна оболонка розміщується на одному з серверів глобальної мережі Internet, ядро оболонки реалізовано мовою PHP, база знань і база фактів експертної системи реалізуються в СУБД MySQL. Передбачається, що база знань експертної системи розробляється за допомогою іншого інструментального засобу на локальному комп'ютері. Система W.E.S.T. може бути використана для створення в мережі Internet експертних систем та надання на їх основі консультаційних послуг у сільському господарстві для вирішення завдань діагностики в рослинництві, тваринництві, а також технічній діагностиці при обслуговуванні сільськогосподарської техніки [5].

У Харківському національному економічному університеті розроблена клієнт-серверна експертна навчальна система для мереж Internet/Intranet, що використовує інструментальний засіб для побудови баз знань «КАРКАС», заснованого на програмуванні сокетів [6].

У Саратовському державному технічному університеті розроблена експертна система для розв'язування задачі про комівояжера з використанням мови логічного програмування Prolog [7].

У Криворізькому національному університеті на базі вільно поширюваної web-орієнтованої експертної оболонки eXpertise2Go [8] створюються навчальні експертні системи для ефективного управління самостійною навчально-пізнавальною діяльністю студентів з вищої математики, яка б надавала можливість організувати

автоматизований контроль та корекцію результатів навчальної діяльності, тренування тощо. Прикладом такої експертної системи є, зокрема, web-орієнтована експертна педагогічна система «Визначення типу диференціального рівняння» [9].

Широке поширення експертних систем продукційного типу зумовлено застосуванням різноманітних спеціалізованих інструментальних засобів їх розробки. Розглянемо деякі з цих засобів.

Одним з найбільш широко використовуваних інструментальних середовищ для розробки експертних систем є CLIPS завдяки своїй швидкості, ефективності і безкоштовності. CLIPS включає повноцінну об'єктно-орієнтовану мову COOL для створення експертних систем. Хоча вона написана мовою C, її інтерфейс набагато ближче до мови функціонального програмування LISP. Розширення можна створювати мовою C++, крім того, можна інтегрувати CLIPS з програмами створеними мовою C++ [10].

Інструментальне програмне забезпечення ESWin 2.0 призначене для створення та експлуатації експертних систем для вирішення різних завдань, що зводяться до задач прийняття рішень (діагностики, конфігурування, ідентифікації тощо) [11]. ESWin 2.0 розроблено на основі технології гібридних експертних систем з поданням знань у вигляді фреймів, правил-продукцій і лінгвістичних змінних, та можливістю розробляти і запускати спеціалізовані програми у вигляді exe-файлів, а також, в процесі вирішення завдань використовувати дані з баз даних, доступ до яких здійснюється за допомогою SQL-запитів, що формуються автоматично.

З швидким розвитком хмарних технологій і розширенням доступу до мережі Internet широкого кола користувачів з'явилася можливість централізованого зберігання і супроводу баз знань (експертних систем) та надання доступу до них через канали зв'язку. Більше того, у зв'язку з бурхливим розвитком мобільного зв'язку з'являється можливість доступу до таких експертних систем через дешеві і малогабаритні засоби, якими є мобільні пристрої (телефони, смартфони, планшети і т.і.).

Мета статті

Метою даної роботи є дослідження технології розробки web-орієнтованих експертних систем на основі продукційної моделі подання знань з використанням експертної оболонки eXpertise2Go та створення за допомогою цієї технології консультативної експертної системи з методів оптимізації.

Експертна система з методів оптимізації створюється:

- для використання у навчальному процесі ВНЗ при підготовці майбутніх математиків, прикладних математиків, фахівців з інформаційних технологій та економічної кібернетики,
- для аналітиків і логістів фірм, компаній і підприємств, які використовують наукові підходи і методи оптимізації для вирішення виробничих задач.

Постановка завдання

Основними завданнями статті є:

- побудова на основі правил продукції бази знань з методів розв'язування задач оптимізації, що має містити відомості про основні класи задач оптимізації, про властивості цільових функцій, про характер і структуру обмежень задач оптимізації, про методи розв'язування оптимізаційних задач, про засоби систем комп'ютерної математики для розв'язання задач оптимізації;

– створення web-орієнтованої консультаційної експертної системи з методів оптимізації на основі продукційної моделі подання знань, що передбачає використання вільно поширюваної web-орієнтованої експертної оболонки eXpertise2Go [8].

Виклад основного матеріалу

1. Основні поняття

При пошуку найбільш зручних, раціональних засобів і форм інформаційного обміну людина найчастіше стикається з проблемою компактного, однозначного і достатньо повного подання знань про відповідну предметну область.

Знання (в загальному розумінні) – це, з одного боку, відомості, обізнаність у певній галузі діяльності людини, з іншого боку – перевірений практикою результат пізнання дійсності, її «правильне» відображення в свідомості людини. Відповідно до концепції баз знань, під терміном «знання» в штучному інтелекті розуміють сукупність спеціалізованих (орієнтованих на вирішення багатьох завдань з обмеженої предметної області) фактів, правил їх опрацювання, умов застосування правил до конкретних фактів, методів одержання нових фактів і способів організації процесу логічного виведення.

Однією з найважливіших проблем у галузі штучного інтелекту (ШІ) є проблема подання знань, тобто проблема їх моделювання на комп'ютері. На сьогодні розроблено вже достатню кількість моделей подання знань. Кожна з них має свої переваги і недоліки, а тому для кожної конкретної задачі необхідно обирати ту модель, яка як найкраще підходить для заданої задачі. Від цього буде залежити не стільки ефективність розв'язку поставленої задачі, скільки можливість її розв'язання взагалі. Найбільш відомими моделями подання знань в системах штучного інтелекту (СШІ) є (див., наприклад, [13]-[17]): логічна модель; продукційна модель; модель семантичної мережі; фреймова модель; моделі мішаного типу.

База знань (англ. *Knowledge base, KB*) – це сукупність відомостей (про реальні об'єкти, процеси, події або явища), що відносяться до певної теми або задачі, організована так, щоб забезпечити зручне представлення цієї сукупності як в цілому, так і будь-якої її частини.

Продукційна модель подання знань є однією з найпоширеніших в системах штучного інтелекту. Подання знань за допомогою правил продукцій дещо подібне до правил виведення у логічних моделях. Це надає можливість за допомогою продукцій виконувати ефективне виведення висновку з посилань, крім того, завдяки природній аналогії процесу міркувань людини дані моделі досить наочно відображають знання про предметну область.

Продукції становлять оператори виду «*ситуація – дія*», де «*ситуація*» містить опис ситуації, до якої застосовується продукція, «*дія*» – набір інструкцій, які треба виконати в разі застосування продукції:

Якщо < Ситуація > то < Дія >.

Системи опрацювання знань, що використовують цю модель, отримали назву «*продукційних систем*».

Експертні системи продукційного типу складаються з *баз правил* (знань), *робочої пам'яті* та *інтерпретатора правил* (вирішувача), який реалізує певний механізм логічного виведення.

Будь-яке продукційне правило, що міститься в базі знань, складається з двох частин: *антецедента* (посилання) і *консеквентна* (висновку). *Антецедент* являє собою

умовну частину і складається з елементарних речень, з'єднаних логічними зв'язками «і» чи «або». Консеквент включає одне або декілька речень, які виражають або деякий факт, або вказівку на певну дію, що підлягає виконанню. Продукційні правила прийнято записувати у вигляді «антецедент» → «консеквент».

Приклад продукційного правила:

$$\begin{array}{ll}
 \text{ЯКЩО} & \text{«Задана задача оптимізації не має обмежень»} \\
 i & \\
 & \text{«Задача залежить від однієї змінної»} \\
 i & \\
 & \text{«Потрібно шукати глобальний мінімум»} \\
 \text{ТО} & \text{«Розглядається задача безумовної оптимізації від однієї змінної.} \\
 & \text{Розв'язується за допомогою методу рівномірного перебору, методу} \\
 & \text{послідовного перебору або методу ламаних»}.
 \end{array} \quad (1)$$

Будь-яке правило складається з однієї або декількох пар «атрибут-значення». У робочій пам'яті продукційних систем зберігаються пари атрибут-значення, істинність яких встановлена в процесі вирішення конкретного завдання до деякого поточного моменту часу. В процесі логічного виведення кожне правило з бази правил може спрацювати лише один раз.

Основні переваги систем, заснованих на продукційних моделях, пов'язані з простотою подання знань та організації логічного виведення. До недоліків таких систем можна віднести: відмінність від структур знань, властивих людині; незрозумілість взаємних відношень між правилами; складність оцінювання цілісного образу знань; при накопиченні досить великої кількості (порядку декількох сотень) продукцій вони починають суперечити одна одній. При розробці невеликих систем (десятки правил) проявляються, в основному, позитивні сторони продукційних моделей подання знань, проте при збільшенні обсягу продукційних правил у базі знань більш помітними стають слабкі сторони цих моделей.

З функціональної точки зору експертна система являє собою автоматизовану систему, що використовує знання фахівців про деяку конкретну досить вузьку предметну галузь і яка в межах цієї галузі здатна пропонувати рішення поставленої проблеми на рівні експерта-фахівця. Експертні системи можуть виконувати деякі функції, виконання яких зазвичай вимагає залучення досвіду людини-спеціаліста, або грати роль помічника для людини, що приймає рішення. Особа, яка приймає рішення, може бути експертом зі своїми власними знаннями і досвідом, і в цьому випадку програма може «виправдати» своє існування, підвищуючи ефективність його роботи. Альтернативний варіант – людина, яка працює з такою системою, може з її допомогою домогтися результатів більш високої якості.

2. Технологія створення web-орієнтованої експертної системи

Для створення web-орієнтованої експертної системи, заснованої на продукційній моделі подання знань, пропонується технологія, що передбачає використання web-орієнтованої оболонки eXperts2Go [8].

Web-орієнтована експертна оболонка eXperts2Go є вільно поширюваним програмним засобом, що надає можливість створювати експертні системи, генеруючи базу знань за допомогою інструменту для створення та перевірки таблиць розв'язків e2gRuleWriter, який має досить зручний та інтуїтивно зрозумілий у використанні інтерфейс (рис. 1), а також, надає користувачу можливість побачити як експертна система використовує правила виведення з бази знань для прийняття рішення.

Особливості налаштувань даного інструменту надають можливість користувачеві обрати мову локалізації (зокрема українську), що робить використання цієї системи ще зручнішим.

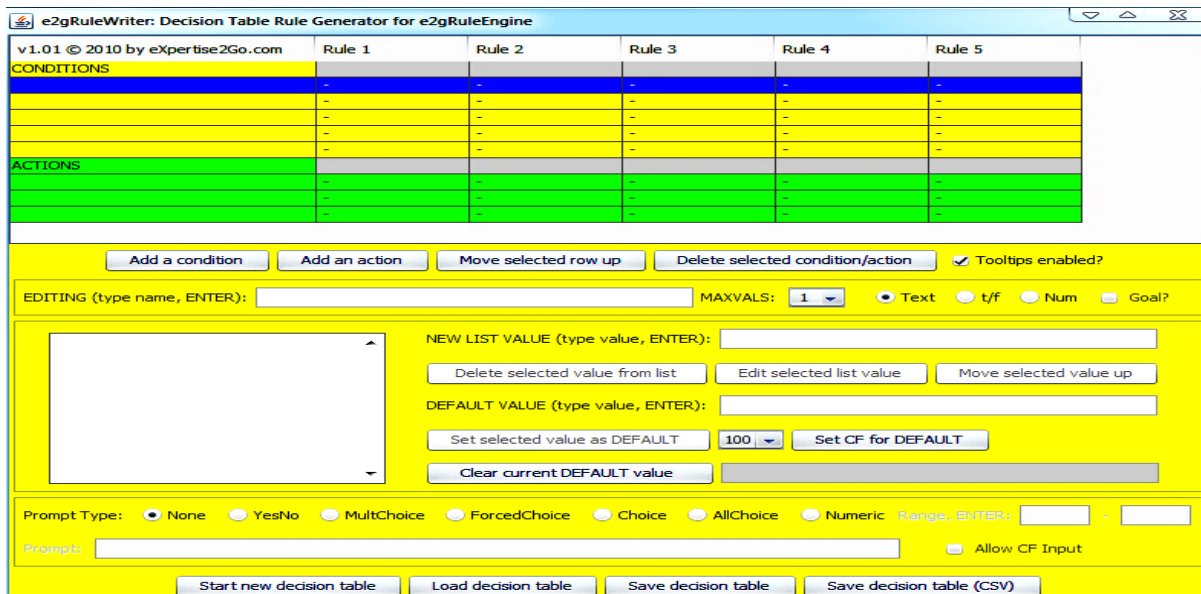


Рис. 1. Інтерфейс таблиць розв'язків у модулі e2gRuleWriter

Для створення бази знань експертної системи потрібно заповнити таблицю розв'язків (рис. 2), виконавши такі дії:

- 1) визначити умови (поле «Conditions»);
- 2) визначити дії (поле «Actions»);
- 3) визначити правила (поля «Rule»);
- 4) згенерувати та переглянути базу знань натисканням відповідно кнопок «Save knowledge base» та «Display knowledge base»;
- 5) випробувати базу знань за допомогою аплету e2gRuleEngine.jar.

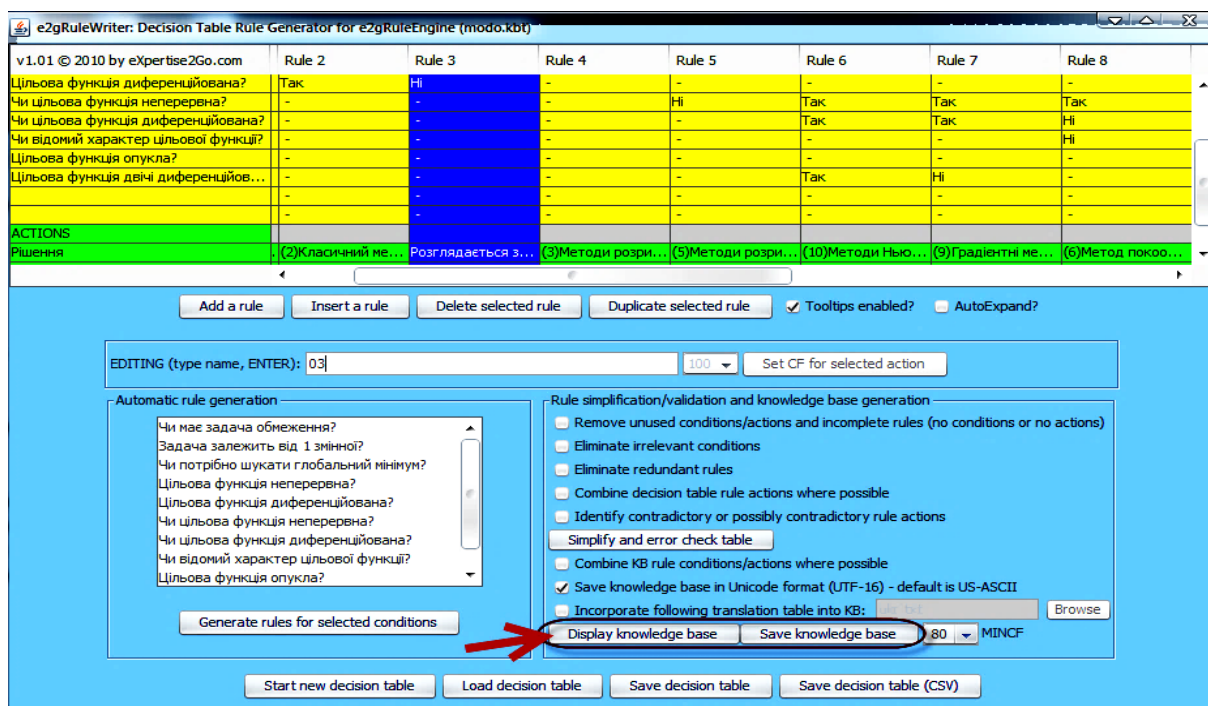


Рис. 2. Приклад заповнення таблиць розв'язків e2gRuleWriter

Для використання згенерованої бази знань, що зберігається у файлі з роширенням «.kb», до web-сторінки експертної системи підключається аплет e2gRuleEngine.jar. При підключенні даного аплету можуть виникнути певні проблеми і помилки, які будуть розглянуті нижче.

Основні переваги експертної оболонки eXpertise2Go:

- eXpertise2Go – вільно поширюваний web-орієнтований програмний засіб з досить зручним і простим у використанні інтерфейсом;
- eXpertise2Go надає можливість користувачу переглянути обґрунтування запропонованого варіанту вирішення проблеми, тобто можна побачити як експертна система використовує правила з бази знань для прийняття рішення.

3. Етапи створення експертної системи з методів оптимізації

Процес розробки та створення експертної системи складається з 6 основних етапів (див., наприклад, [15]):

1. Ідентифікація;
2. Концептуалізація;
3. Формалізація;
4. Реалізація;
5. Тестування;
6. Дослідна експлуатація.

Процес розробки експертної системи не зводиться до строгої послідовності перерахованих вище етапів. У ході роботи доводиться неодноразово повертатися на більш ранні етапи і переглядати прийняті там рішення.

Розглянемо коротко реалізацію зазначених етапів створення експертних систем на прикладі проектування і створення експертної системи з методів оптимізації.

На етапі *ідентифікації* було визначено цілі проекту, завдання, що підлягають вирішенню, експерти і типи користувачів ЕС, сплановано хід розробки прототипу експертної системи. Мета проекту – створення web-орієнтованої експертної системи з методів оптимізації, призначену для консультування користувачів щодо розв'язання задач оптимізації, в результаті чого вони отримують розгорнену відповідь на питання, що їх цікавлять, обрано необхідні програмні засоби і джерела для наповнення бази знань ЕС.

Завдяки консультаціям з фахівцями у галузі теорії і методів оптимізації, аналізу навчальної та наукової літератури було отримано більш повне уявлення про предметну область.

Для створення експертної системи з методів оптимізації було обрано технологію, що передбачає використання таких програмних засобів:

- eXpertise2Go – web-орієнтована оболонка для створення експертних систем на основі продукційних правил;
- PHP – скриптова мова програмування для генерації HTML-сторінок на web-сервері;
- Denver – локальний сервер.

На етапі *концептуалізації* визначено: термінологію, перелік головних понять та їх атрибутів, структуру вхідних і вихідних даних, стратегію прийняття рішень та побудовано дерево пошуку експертної системи з методів оптимізації (рис. 3).

Кожне рішення, що повинна запропонувати користувачу експертна система, містить відомості про:

- клас оптимізаційної задачі, до якого вона відноситься;
- властивості цільової функції задачі;
- характер і структуру обмежень задачі;

- перелік методів розв’язання оптимізаційної задачі;
- відомості про системи комп’ютерної математики, за допомогою яких можна розв’язати оптимізаційну задачу певного класу, а також перелік вбудованих функцій і пакетів розширення, що використовуються цими системами.

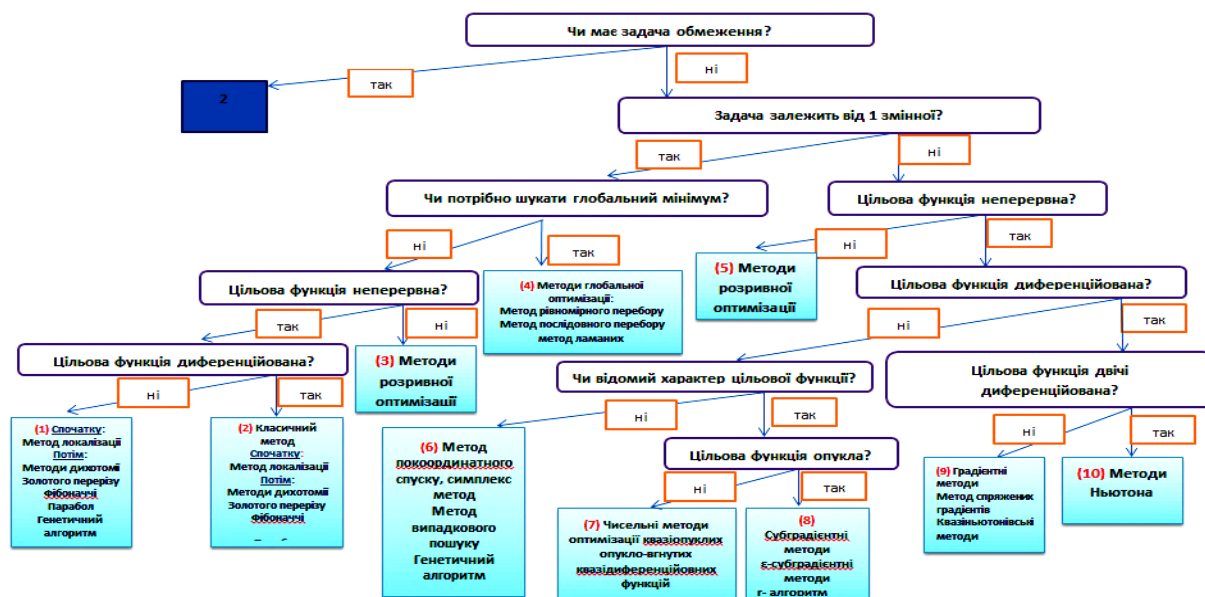


Рис. 3. Фрагмент дерева пошуку експертної системи з методів оптимізації

Також на цьому етапі було визначено структуру експертної системи (рис. 4).

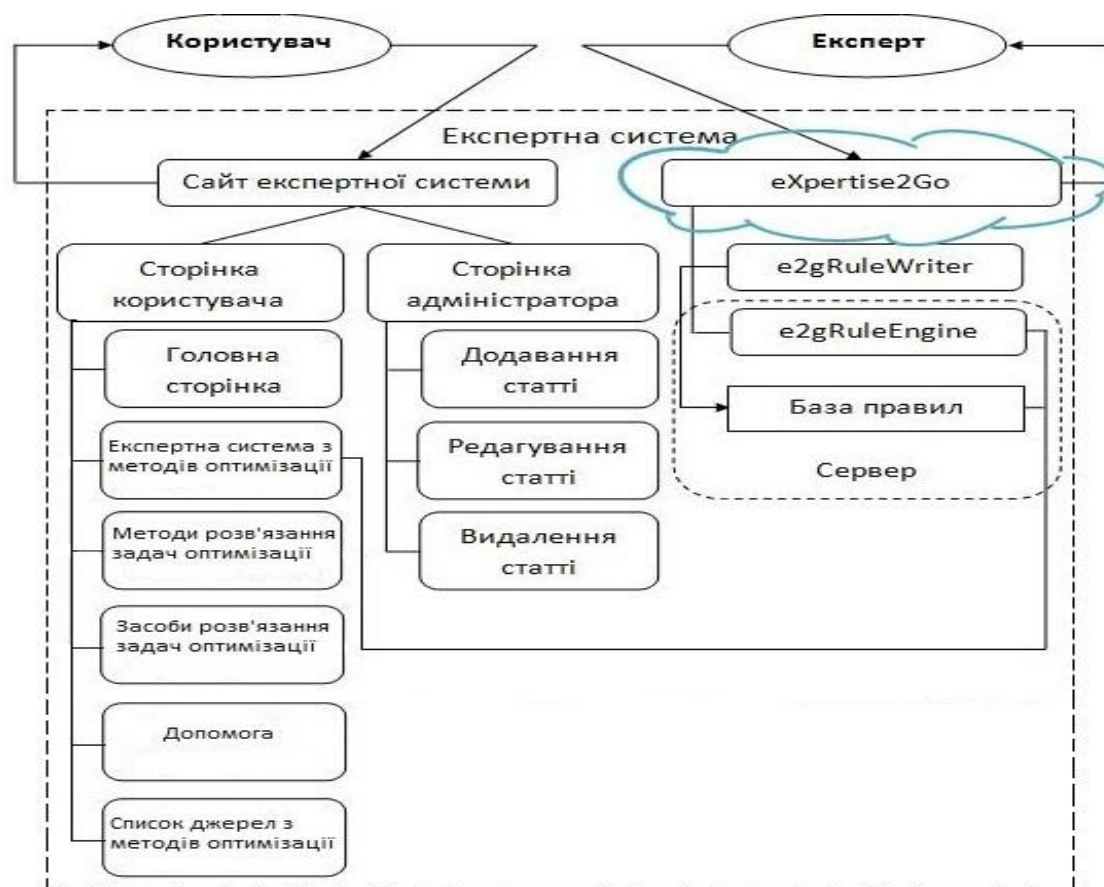


Рис. 4. Структура web-орієнтованої експертної системи з методів оптимізації

На етапі *формалізації* за розробленим деревом пошуку створювалась база знань експертної системи з методів оптимізації на основі продукційної моделі за допомогою інструменту для створення та перевірки таблиць розв'язків e2gRuleWriter експертної оболонки eXpertise2Go, де правила-продукції мають вигляд (1). Загальна кількість правил бази знань експертної системи з методів оптимізації становить 39 правил-продукцій.

Наведемо приклад одного з цих правил-продукцій:

```
RULE [04]
If [Задача має обмеження?] = "Ні" and
  [Задача залежить від 1 змінної?] = "Так" and
  [Чи потрібно шукати глобальний мінімум?] = "Так"
Then [Рішення] = "4. Розглядається задача безумовної оптимізації
від однієї змінної, причому  $f(x)$  – ліпшицева функція, неперервна на
відрізку  $[a,b]$ . Розв'язати дану задачу можна методами глобальної
оптимізації: методом рівномірного перебору, методом послідовного
перебору та методом ламаних; за допомогою пакетів: MathCad –
використавши функції розв'язання Minimize чи Maximize; Matlab –
використавши функцію розв'язання Fminbnd (пакет Optimization
Toolbox); Mathematica – використавши функцію розв'язання
FindMinimum; Maple – використавши функції розв'язання Minimize,
Maximize чи Extrema; SciLab – використавши функцію розв'язання
Fminsearch; Sage – використавши функцію розв'язання
Find_minimum_on_interval; Wolfram|Alpha – використавши функції
розв'язання Minimize чи Maximize".
```

На етапі *реалізації* за допомогою обраних засобів створювався сайт експертної системи з методів оптимізації, структура якого подана на рис. 4.

Звернемо увагу на підключення експертної оболонки eXpertise2Go до сайту експертної системи. Це робиться за допомогою наступного коду:

```
1. <APPLET CODE="e2gRuleEngine.class"
  archive="e2gRuleEngine.jar" width=600 height=350>
2. <PARAM NAME="KBURL" VALUE="modo.txt">
3. <PARAM NAME="APPTITLE" VALUE="Консультація з
  методів оптимізації">
4. <param name="BGCOLOR" value=" #ECECEC">
5. <param name="titlecolor" value="#0000ff">
6. <param name="STARTBUTTON" value="Розпочати
  консультацію">
7. <PARAM NAME="DEBUG" VALUE="false">
  Експертна система
8. </APPLET>
```

Код, наведений в рядках 1-8, являє собою аплет підключення експертної оболонки eXpertise2Go до сайту. Розглянемо дані рядки більш детально: в першому рядку представлено підключення аплету до сайту, а також розміри вікна експертної системи; в другому рядку – підключається база знань експертної системи (modo.txt); в третьому рядку – встановлюється заголовок вікна експертної системи; в четвертому і п'ятому рядках – встановлюється колір заднього фону та колір заголовку відповідно; в шостому рядку – встановлюється кнопка для запуску експертної системи; в сьомому рядку – дається команда про вимкнення додаткового вікна, вікна відладки експертної системи (дане вікно необхідне в тому разі, коли виникають помилки при роботі з експертною системою); восьмий рядок – закриття даного коду.

На етапі *тестування* проводилось оцінювання обраного способу подання знань в ЕС в цілому, експертна система перевірялась на зручність і адекватність інтерфейсу, ефективність стратегії управління її підсистемами, якість прикладів, коректність роботи аплету e2gRuleEngine.jar з базою знань.

Під час тестування ЕС була виявлені певні проблеми при роботі з аплетом e2gRuleEngine.jar на боці користувача. Для нормального функціонування даного аплету на комп'ютері користувача повинен бути встановлений відповідний пагін Java. Якщо встановлена версія Java 7, виникають помилки підключення експертної системи до сайту. Номери помилок та відповідні шляхи їх подолання представленні на сайті eXpertise2Go [8]. Розглянемо помилку 800, яка виникла під час дослідження. Помилка 800 говорить про те, що відсутня чи порожня база знань. Вирішенням даної помилки будуть такі дії: після збереження бази знань з розширенням .kb, необхідно ще раз зберегти її з розширенням .txt, і відповідно в аплеті змінити розширення параметра «KBURL» «.kb» на «.txt» (див. рядок 2 коду підключення аплету). Далі необхідно перезапустити локальний сервер та оновити сайт.

У ході дослідження також було виявлено проблему з роботою аплету при оновленні версій Java. На сьогодні це версія 8.31 [18]. Для успішної роботи з аплетом необхідно на комп'ютері користувача в налаштуваннях Java («Security») додати адресу сайту експертної системи до списку винятків (вікно Exeption Site List на рис. 5).

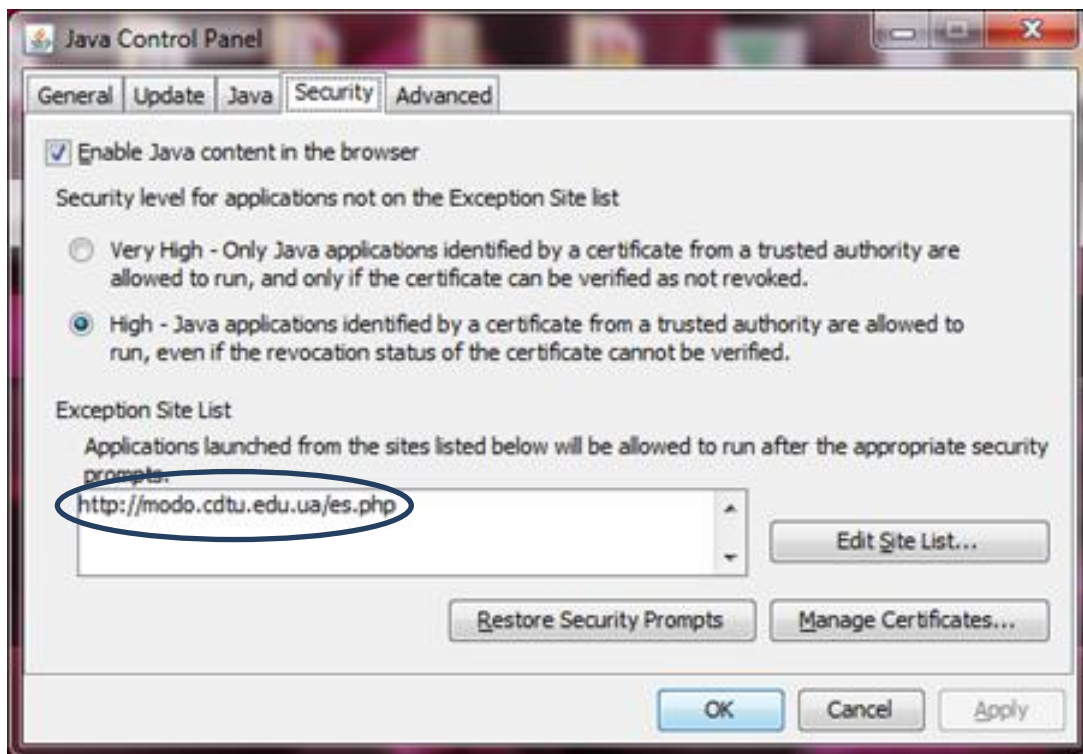


Рис. 5. Приклад налаштування на комп'ютері користувача параметрів Java (вікно Exeption Site List) для роботи з аплетом e2gRuleEngine.jar

На етапі *дослідної експлуатації* перевірялась придатність експертної системи з методів оптимізації для розв'язування конкретних задач за участю кінцевих користувачів.

4. Опис сайту «Експертна система з методів оптимізації»

В результаті виконання всіх етапів розробки експертної системи було створено сайт, що має назву «Експертна система з методів оптимізації» і розміщений за адресою <http://modo.cdtu.edu.ua/>. Головна сторінка сайту зображена на рис. 6.

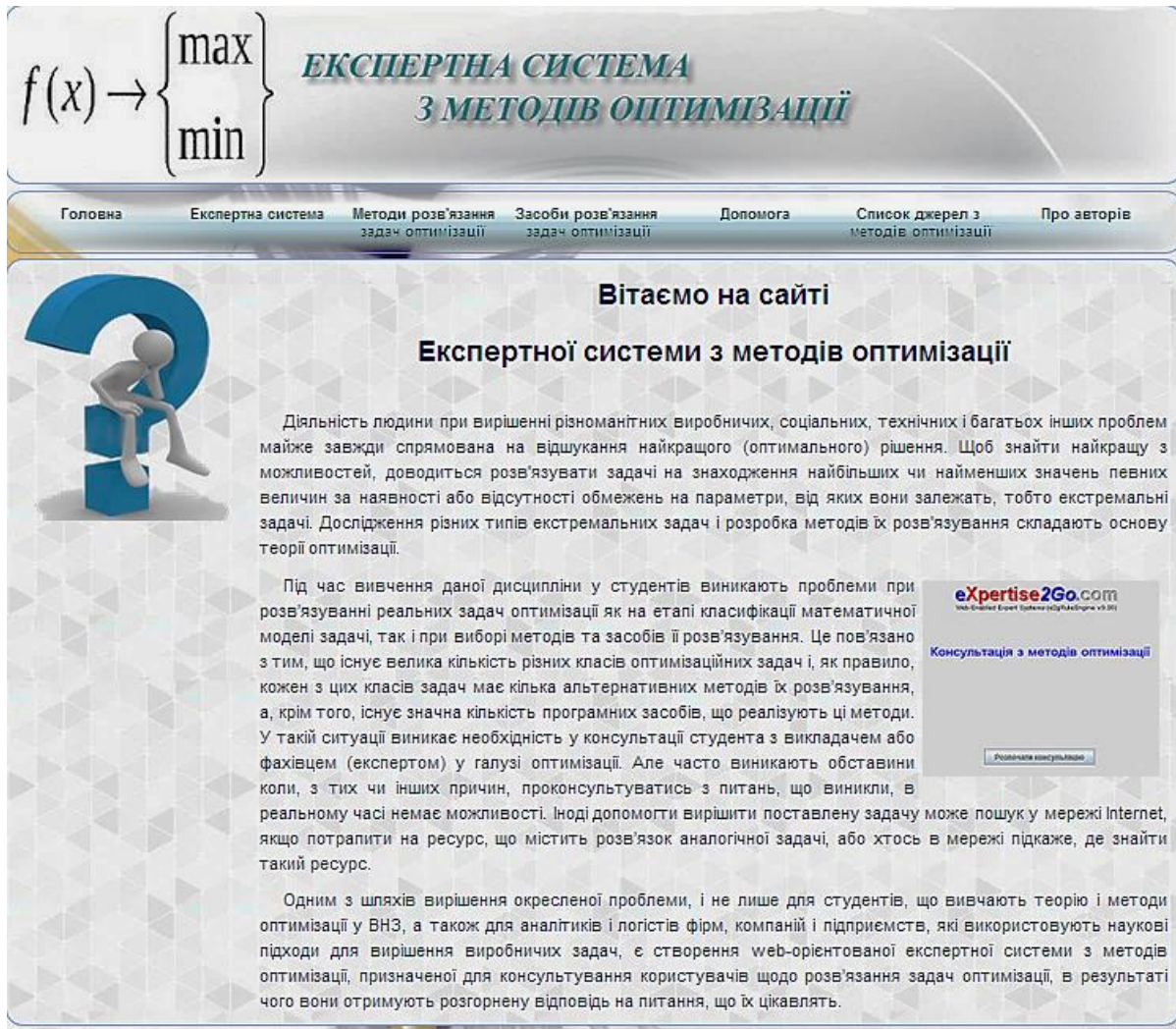


Рис. 6. Головна сторінка сайту ЕС з методів оптимізації

Для входу в систему необхідно зайти на головну сторінку сайту «Експертна система з методів оптимізації». На головній сторінці розміщено відомості про експертну систему та актуальність її розробки.

Щоб розпочати консультацію з методів оптимізації, необхідно перейти на сторінку «Експертна система» і натиснути кнопку «Розпочати консультацію». Система запропонує користувачу ряд питань щодо властивостей цільової функції задачі оптимізації, наявності чи відсутності обмежень задачі, їх структури і т.п., а також варіанти відповідей на ці питання.

В результаті опитування користувача формується висновок, у якому містяться відомості про:

- клас оптимізаційної задачі, до якого вона відноситься;
- властивості цільової функції задачі;
- характер і структуру обмежень задачі;
- перелік методів розв'язання оптимізаційної;
- відомості про системи комп'ютерної математики, з допомогою яких можна розв'язати оптимізаційну задачу, а також перелік вбудованих функцій і пакетів розширення, що використовуються цими системами.

На рис. 7-11 продемонстровано приклад дій користувача, необхідних для одержання консультації при роботі з експертною системою з методів оптимізації.

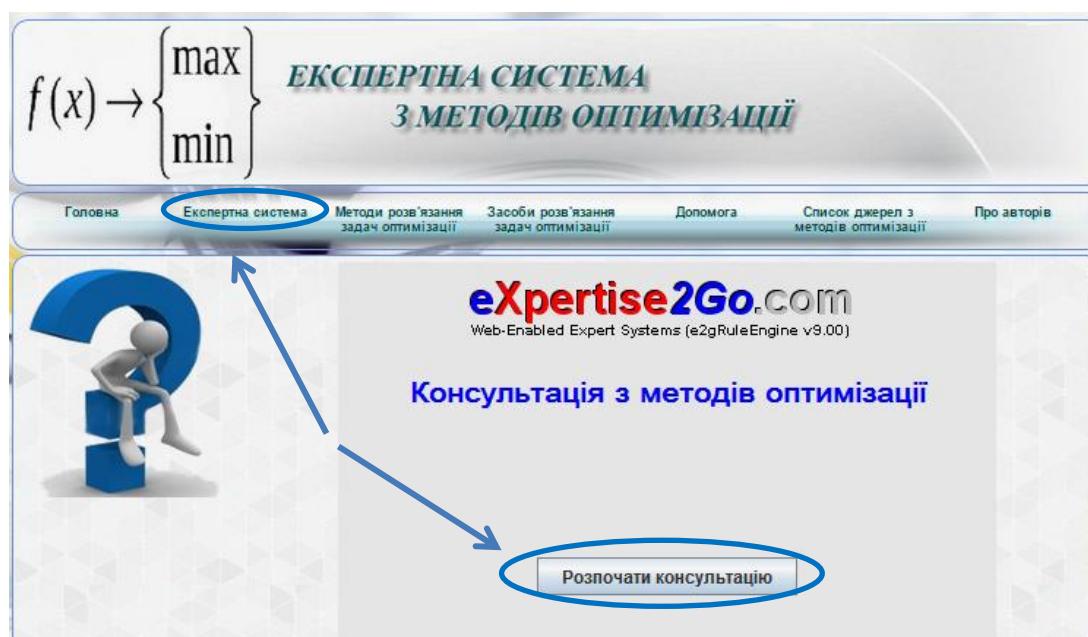


Рис. 7. Початок консультації в експертній системі з методів оптимізації

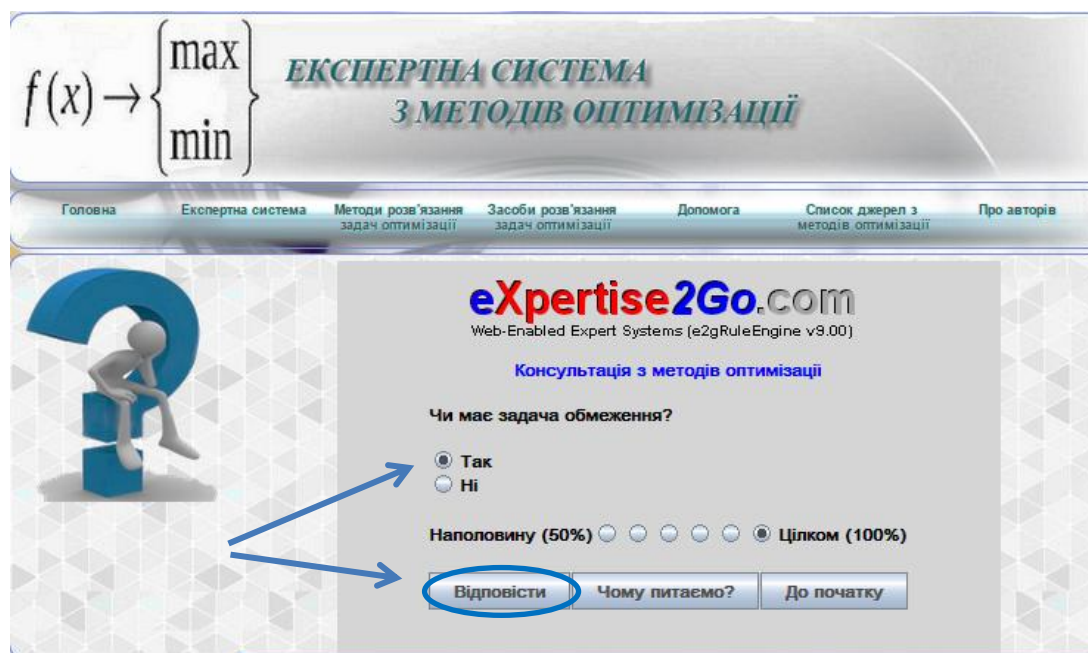


Рис. 8. Вікно з варіантом відповіді користувача на запит ЕС

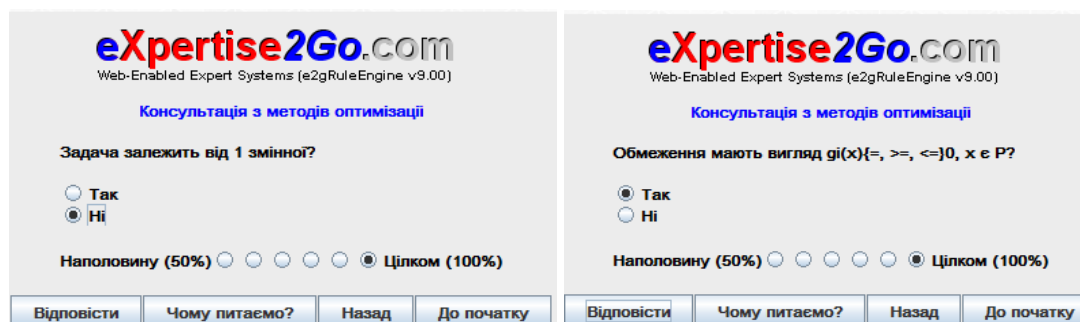


Рис. 9. Вікно з варіантами відповідей користувача на запити ЕС (продовження)

The image shows two side-by-side screenshots of the eXpertise2Go.com web interface. Both screens display the title 'Консультація з методів оптимізації' (Consultation with optimization methods) and the version 'Web-Enabled Expert Systems (e2gRuleEngine v9.00)'.
 The left screen asks: 'Задана задача математичного програмування лінійна?' (Is the given mathematical programming problem linear?). It has radio buttons for 'Так' (Yes) and 'Ні' (No), with 'Ні' selected. Below it is a progress indicator for 'Наполовину (50%)' and 'Цілком (100%)', with 'Цілком (100%)' selected. At the bottom are buttons: 'Відповісти', 'Чому питаємо?', 'Назад', and 'До початку'.
 The right screen asks: 'Функціональні обмеження лінійні?' (Are functional constraints linear?). It also has radio buttons for 'Так' and 'Ні', with 'Ні' selected. It features the same progress indicator and bottom buttons as the left screen.

Рис. 10. Вікно з варіантами відповідей користувача на запити ЕС (продовження)

The image shows two side-by-side screenshots of the eXpertise2Go.com web interface, continuing the consultation process.
 The left screen asks: 'Цільова функція диференційована?' (Is the objective function differentiable?). It has radio buttons for 'Так' (Yes) and 'Ні' (No), with 'Так' selected. Below it is a progress indicator for 'Наполовину (50%)' and 'Цілком (100%)', with 'Цілком (100%)' selected. At the bottom are buttons: 'Відповісти', 'Чому питаємо?', 'Назад', and 'До початку'.
 The right screen asks: 'Всі функціональні обмеження рівності?' (Are all functional constraints equality?). It has radio buttons for 'Так' and 'Ні', with 'Ні' selected. It features the same progress indicator and bottom buttons as the left screen.

Рис. 11. Вікно з варіантами відповідей користувача на запити ЕС (продовження)

В результаті виконаних дій і відповідей користувача на запити ЕС запропонує свої рекомендації щодо розв'язування відповідної оптимізаційної задачі (рис. 12). Натиснувши на кнопку «Всі висновки» система у додатковому вікні показує всі запити, що були задані користувачу (рис. 12). Крім того, натиснувши на кнопку «Пояснити», користувач отримає повний звіт про те, чому одержано відповідний висновок з переліком всіх запитів системи і відповідей на них користувача.

The image shows a screenshot of the eXpertise2Go.com interface displaying a conclusion. At the top, it says 'ВИСНОВОК: Консультація з методів оптимізації'. Below this, it provides a detailed solution: 'Рішення : 34. Розглядається задача нелінійної умовної оптимізації, причому цільова функція диференційована і всі функціональні обмеження нелінійні нерівності. Розв'язати дану задачу можна методом зовнішніх штрафних функцій; за допомогою пакетів: MathCad - використавши функції розв'язання Minimize чи Maximize; Matlab - використавши функцію розв'язання fmincon (пакет Optimization Toolbox); Maple - використавши функцію розв'язання Extrema; SciLab - використавши функцію розв'язання Optim; Sage - використавши функцію розв'язання Minimize_constrained; Wolfram|Alpha - використавши функції розв'язання Minimize over/in/on чи Maximize over/in/on. (100,0% довіри)'.
 Below the text is a list of questions asked during the consultation, with a scroll bar on the right. The questions are: 'Всі функціональні є обмеження рівності?', 'Задана задача математичного програмування ...', 'Задача має обмеження?', 'Обмеження мають вигляд $g_i(x) \{=, >=, <= \} 0, x \in \dots$ ', 'Рішення', 'Функціональні обмеження лінійні?', 'Цільова функція чи є диференційована?', and 'Чи задача залежить від 1 змінної?'. At the bottom, there are buttons: 'Пояснити', 'всі висновки', 'Назад', and 'До початку'.

Рис. 12. Фрагмент вікна з висновком ЕС щодо розв'язування задачі користувача

Також розроблений сайт має розділи, які допоможуть користувачу при розв'язанні конкретних оптимізаційних задач: «Методи розв'язання задач оптимізації» – містить перелік посилань на методи розв'язання задач оптимізації, про які є відомості в інформаційній базі ЕС (рис. 13); «Засоби розв'язання задач оптимізації» – містить перелік засобів розв'язання задач оптимізації, про які є відомості в інформаційній базі

ЕС, зокрема про системи комп'ютерної математики Maple, Matlab, Mathematica MathCad, Wolfram|Alpha, SkiLab, Sage і MS Excel [14]; «Допомога» – містить відомості про кожну сторінку сайту та інструкції, які необхідно виконати, щоб одержати консультацію з методів оптимізації; «Список джерел з методів оптимізації» – містить досить широкий список наукової і навчальної літератури з теорії і методів оптимізації.



Рис. 13. Фрагмент вікна з переліком методів розв'язування задач оптимізації

Засоби розв'язання задач оптимізації

Системи комп'ютерної математики
Обравши необхідну СКМ, можна переглянути матеріали з прикладами розв'язування задач.

Задача оптимізації	Задача одновимірної оптимізації	Задача безумовної оптимізації функції багатьох змінних	Задача лінійного програмування	Задача квадратичного програмування	Задача нелінійної умовної оптимізації
Програма					
Mathcad	Minimize, Maximize	Minimize, Maximize	Minimize, Maximize	Minimize, Maximize	Minimize, Maximize
Matlab	Fminbnd (naket Optimization Toolbox)	Fminsearch, Fminunc (naket Optimization Toolbox)	Linprog (naket Optimization Toolbox)	Quadprog (naket Optimization Toolbox)	Fmincon (naket Optimization Toolbox)
Mathematica	FindMinimum	FindMinimum	ConstrainedMax, ConstrainedMin, LinearProgramming		
Maple	Minimize, Maximize, Externa	Minimize, Maximize, Externa	Externa, naket розширення Simplex	Externa	Externa
Sage	Find_minimum_on_interval	Minimize	Linear_program		Minimize _constrained
SkiLab	Fminsearch	Fminsearch	Karmarkar	Op_solve, Qpsolve	Optim
Wolfram Alpha	Extrema calculator, Minimum calculator, Maximum calculator, Minimize, Maximize, Stationary points of, Stationary point calculator	Minimize, Maximize			Minimize over, Maximize over, Minimize on, Minimize in; Maximize on, Maximize in;
MS Excel	Надбудова Solver (Пошук рішення)	Надбудова Solver (Пошук рішення)	Надбудова Solver (Пошук рішення)	Надбудова Solver (Пошук рішення)	Надбудова Solver (Пошук рішення)

Рис. 14. Фрагмент вікна з переліком засобів розв'язування задач оптимізації

Висновки

1. У даній роботі представлені результати розробки web-орієнтованої консультаційної експертної системи з методів оптимізації на основі продукційної моделі подання знань.

2. Web-орієнтована експертна система надає можливість користувачу одержати рекомендації щодо вирішення проблеми у будь-який час і з будь-якого місця, де є вхід до мережі Інтернет.

3. Експертна система з методів оптимізації створена з метою використання у навчальному процесі ВНЗ при підготовці майбутніх математиків, прикладних математиків, а також фахівців з інформаційних технологій та економічної кібернетики.

4. Розроблена експертна система з методів оптимізації також буде корисною для аналітиків і логістів фірм, компаній і підприємств, які використовують наукові підходи і методи оптимізації для вирішення виробничих задач.

5. Запропонована технологія створення експертних систем може бути використана при розробці web-орієнтованих експертних систем для різних предметних галузей.

Література

1. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 384 с.
2. Разработка гибридной экспертной системы для оценки состояния, оптимизации обслуживания и ремонта жилых зданий. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.math.rsu.ru/ovtm/expert.html>
3. Экспертные системы в комплексной реабилитации инвалидов. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mnpu.ru/faculty/ooo/405/411/409/>
4. Примеры Экспертных систем. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://tpl-it.wikispaces.com/%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D1%80%D1%8B+%D0%AD%D0%BA%D1%81%D0%BF%D0%B5%D1%80%D1%82%D0%BD%D1%8B%D1%85+%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC>
5. Гаврилов А.В., Чистяков Н.А. Гибридные экспертные системы в WWW. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://insycom.ru/html/Articles/2003/agro2003.htm>
6. Бурдаев В.П. Клиент-серверная технология экспертной обучающей системы для сетей Интернет и Интранет // Искусственный интеллект, 2008. №3. – С. 364-373. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/6980/01-Buradev.pdf?sequence=1>
7. Экспертная система для решения задачи о коммивояжере. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.za4et.net.ru/referat/rvomrm>
8. Сайт web-орієнтованої експертної оболонки expertise2go. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://expertise2go.com/e2g3g/>
9. Словак К. І. Методика використання мобільних математичних середовищ у процесі навчання вищої математики студентів економічних спеціальностей : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.10 – інформаційно-комунікаційні технології в освіті / Словак Катерина Іванівна ; Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України. – К., 2011. – 291 с.
10. Джарратано Джозеф, Райли Гари. Экспертные системы: принципы разработки и программирование» : Пер. с англ. – М. : 2006. – 1152 с.
11. Доровский С.В. Интеграция clips в экспертную систему производственного типа // Международный журнал «Программные продукты и системы», № 3, 2011 [11.09.2011]. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://swsys.ru/index.php?id=2813&page=article>
12. ESWin 2.0 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.zipsoft.ru/catalog/1182928257_eswin-v2_0.html
13. Гаврилова Т.А., Хорошевский В.Ф. Базы знаний интеллектуальных систем. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.
14. Литвин В.В., Пасічник В.В., Яцишин Ю.В. Інтелектуальні системи: Підручник. – Львів: «Новий Світ – 2000», 2009. – 406 с.

15. Субботін С. О. Подання й обробка знань у системах штучного інтелекту та підтримки прийняття рішень: Навчальний посібник. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2008. – 341 с.
16. Продукційні моделі. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://knhelp.wordpress.com/2012/04/19/л4-продукційні-моделі/>
17. Портал штучного інтелекту. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.aiportal.ru/articles/expert-systems/design-tools.html>.
18. Сайт java [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://java.com/en/download/>

Стаття надійшла 18.04.2014
Прийнято до друку 06.05.2014

Аннотация

Ю.В. Триус, М.А. Манько

Web-ориентированная консультационная экспертная система по методам оптимизации

Целью исследования является создание web-ориентированной консультационной экспертной системы по методам оптимизации на основе принципов облачных технологий. Задачей исследования является проектирование и разработка экспертной системы на основе продукционной модели представления знаний о предметной области. Результатом исследования является созданная на основе правил продукции база знаний о задачах оптимизации, методах и средствах их решения, а также разработана экспертная система по методам оптимизации с использованием web-ориентированной экспертной оболочки eXpertise2Go.

Ключевые слова: *экспертная система, задачи оптимизации, методы оптимизации, web-ориентированные технологии.*

Summary

Y. Tryus, M. Manko

Web-oriented consulting expert system for methods of optimization

The aim of the study is to create a web-oriented expert system on methods of optimization based on the principles of cloud technologies. Research objectives are designing and develop an expert system on based productive model of knowledge about the subject area.

The object of the research is a web-oriented expert system and the subjects of the research are objectives and methods of optimization. In the research used the methods of mathematical modeling and computer experiment.

The result of research is the knowledge base based on productive model of knowledge about the objectives and methods of optimization and developed on the it basis of web-oriented expert system for solving optimization problems. The expert system is created to guide the learning process in the preparation of mathematicians and applied mathematicians, professionals of IT and economic cybernetics.

Key words: *expert system, optimization problems, methods of optimization, web-oriented technologies.*

USABILITY ASPECT OF INFORMATION SECURITY SYSTEMS

The article is devoted to the problem of usability of information security systems. Importance of usability for successful conducting of security tasks by users is shown. Usability security principles have been analyzed. Investigation of usability issues associated with information security-related tasks is conducted. Descriptions of the demands imposed on the users by each method of corresponding security task are compared with definitions of usability properties. The research on types of relations between usability properties and information security tasks is made. Future implication of the research results is shown.

Key words: software usability, security, information security system, security task, user, usability properties.

Introduction

Usability is an important characteristic of any product that is used by a customer. This applies to software, in particular to information security systems. On the one hand, high usability level of a system allows users to accomplish security tasks with effectiveness, efficiency and satisfaction in a specified context of use. On the other hand, such usability can reduce the ability of information security system to defend against adverse impacts. That is why it is important to establish the types of relations between usability issues and security tasks. It will help to find the compromise solution during the development of usable (with sufficient usability level) information security system.

Literature analysis

The main purpose of information security systems is to defend against adverse impact. In many cases the weakest link of such a system is represented by the human operator. Security systems must be viewed as socio-technical systems that depend on the social context in which they are embedded to function correctly [1]. They will only be able to provide the intended protection when people actually understand and are able to use them correctly. There is a big difference between the degree by which systems can be considered theoretically secure (assuming they are correctly operated) and actually secure (acknowledging that often they will be operated incorrectly). In many cases, there is a trade-off between usability and theoretical security. But some authors maintain that theoretical security does not have to be compromised if usability aspects are considered from the beginning of the system development life cycle [2, 3]. This represents the *sustaining approach* to creating user-friendly security because it does not question the underlying security building blocks, only how they are implemented. However, there are always certain security blocks, which are inherently unsuitable for designing user-friendly security solutions. In that case some authors are talking about the *disruptive approach* which questions the applicability of existing security primitives, and seeks to replace them with other primitives that better support user friendly security [4]. In both approaches, there is a need for understanding the security usability (usability of security) principles. In [5] a set of general security usability principles were proposed: security action and security conclusion usability principles. These principles were used for vulnerability analysis and risk assessment in [6].

Security action usability principles:

- users must understand which security actions are required of them;

- users must have sufficient knowledge and the ability to take the correct security action;
- the mental and physical load of a security action must be tolerable;
- the mental and physical load of making repeated security actions for any practical number of instances must be tolerable.

Security conclusion usability principles:

- user must understand the security conclusion that is required for making an informed decision;
- the system must provide the user with sufficient information for deriving the security conclusion;
- the mental load of deriving the security conclusion must be tolerable;
- the mental load of deriving the security conclusions for any practical number of instances must be tolerable.

In [7] the following properties of security usability are represented:

- Abstraction: this is a system of abstract rules for deciding whether to give access to resources. UI design will need to take this into consideration;
- Lack of feedback: a system security configuration is usually complex, and attempts to summarize it are not adequate;
- Weakest link: users need to be trained or guided in all aspects of security of their system;
- Unmotivated user: security is usually secondary goal to users;
- Limited human skill: usable design must take into account what humans do well and what they don't.

–

Grounding

The major types of security controls that exist today apply to the following areas: identification and authentication, data integrity, data confidentiality, data availability, system integrity and intrusion detection [8]. Many different security control methods [8] involve interactions between humans and computer hardware and software, yet they were largely developed with little regard for usability. Because the degree of security provided by the various security control methods typically depends on the actions of system administrators and end-users, security hinges on the usability. Consequently, there is a critical need to focus on investigation of usability issues associated with information security-related tasks. There is a detailed taxonomy of information security tasks and the associated usability issues in [8].

Previous author's works are devoted to the development of the method and the tool of software product usability management [9]. The method is based on automated multi-criteria usability evaluation. The model of usability evaluation based on the method of nested scalar convolutions and is represented by a scalar function of the additive convolution. It supports usability management of software products based on the automated evaluation of users' feedback. Usability is represented as a four-level hierarchical system of usability criteria. It is decomposed on subcharacteristics, each of which – on corresponding properties, and properties – on measures. Such decomposition is based on the relevant standards, guidelines, expert judgments etc. Usability subcharacteristics from ISO / IEC 25010:2011 were applied [10]. List of properties was developed using QUIM model [11].

The aim of the present article is to determine the connection of information security tasks with usability properties. As a result, it will be possible to predict the effect of the growing value of usability on security.

Case study. The information about the nature of the security task and corresponding methods are taken from [8]. We compare included descriptions of the demands imposed on the users and system administrators by each security method with definitions of usability properties from [9]. Results are pointed in Table 1, where inversely proportional relation is denoted as ● and directly proportional relation – as ○. Some explanations are given below.

Identification and Authentication.

1. Password entry: a) require user to maintain and act on knowledge that is sometimes detailed. Such requirement is opposite to the Minimal Action property definition [9]; b) high memory demand is inversely proportional to the Minimal Memory Load property; c) password may impose unnatural syntactic and other constraints (e.g. minimum password length) that reduce the Simplicity.

Table 1.

Interactions between usability properties and information security tasks.

Usability properties	Information security tasks					
	Identification & Authentication	Integrity, Confidentiality, and Availability of Data	Intrusion detection	Responding to Intrusions	Assurance of Operational Continuity	General usability
Time behavior		○				
Attractiveness			○	○	○	
Likeability	●	○				
Flexibility	●	○				
Minimal action	●	○				
Minimal memory load	●	●	○	○	○	
User guidance	●	○	○	○	○	
Consistency	●	○				
Self-descriptiveness	●	○				
Feedback		○	○	○	○	
Accuracy		○				
Fault-tolerance		○				
Readability	●	○				○
Controllability	●	○				
Navigability	●	○				
Simplicity	●	○	○	○	○	○
Familiarity			○	○	○	
Guide						○
Demonstrations						○
Help						○

2. Biometrics and physiological approaches often are not user friendly and cause the increasing of user's anxiety. Thus, Likeability value is decreasing.
3. Physiological approach sometimes is not comfortable for certain populations, such as handicap people, shorter and taller persons. In such a case, it contradicts the Accessibility definition. Accessibility is a usability subcharacteristic that includes the

following properties: flexibility, minimal action, minimal memory load, user guidance, consistency, self-descriptiveness, readability, controllability, navigability and simplicity [9].

Integrity, Confidentiality, and Availability of Data.

Corresponding methods of this information security task require from users to be able to: understand and recognize the commands and options, use the commands in an appropriate way, remember keys used in digital signatures [8]. Mentioned abilities are connected with Accessibility and Operability subcharacteristics of usability. Operability includes time behavior, consistency, feedback, fault-tolerance and controllability [8]. Properties of Accessibility were mentioned earlier. Only Minimal memory load has inversely proportional influence on considered task, high value of other properties increase the quality of information security task performed by the user.

Intrusion Detection, Responding to Intrusions, Assurance of Operational Continuity.

1. User should be informed about the internal state of a system. The warning or error messages must be detailed but specific including a suggested corrective action for some security problem, and links to obtain additional information or external assistance. All these demands increase values of User Guidance and Feedback properties of usability.
2. Only relevant security information should be displayed, technical terms should be avoided as much as possible, security activities must be easy to realize and understand. Thus, we have directly proportional relation to Simplicity and Minimal Memory Load properties.
3. In some cases, it is convenient to present important security concepts to the user in an entertaining manner. In that case, Attractiveness of a system will be better.
4. Using of figures or pictures helps to convey the available security features to the user clearly and appropriately. It affects directly on Familiarity property of usability.

General usability.

1. Displayed information should be readable, legible, clear and understandable. Providing of high Readability and Simplicity level increase general usability of a system without reducing its security.
2. User should be able to: understand the instructions and take the appropriate steps; acquire knowledge about the system by reading the instructions, performing training tutorials etc.; have sufficient knowledge on the type of information displayed; be able to use the shortcuts that system provides to accomplish the task quicker. Mentioned abilities directly depend on Guide, Demonstration and Help properties of usability.

Conclusion

Many significant risks are caused by poor usability of information security systems. In earlier author's works, the method and the tool of software usability management were represented. The purpose of using the method is to create a product that meets user expectations. It allows to control reasonably the software usability level taking into account development resources as optimization criteria. In a case of the information security system the method and the tool can help to create software product that allows users to accomplish security tasks with effectiveness, efficiency and satisfaction in a specified context of use. Achieving of satisfied usability level is connected with increasing of usability properties' values. But it is very important to understand how increasing usability will affect on security of the system. This issue was explored in the article. Author made a research on types of relations between usability properties and information security tasks. Further work

will be devoted to the modification of the method and the tool of usability management in order to create usable security systems.

References

1. Sasse M.A. Computer Security: Anatomy of a Usability Disaster, and a Plan for Recovery / M.A. Sasse // CHI'2003: Human Factors in Computing Systems: proceedings. – 2003. – P. 324-338.
2. Sasse M.A. Usable Security: What is it? How do we get it? / M.A. Sasse, I. Fleschais // Security and Usability: Designing Secure Systems that People Can Use. – O'Reilly, 2005. – P. 234-241.
3. Dourish P. An Approach to Usable Security Based on Event Monitoring and Visualization / P. Dourish, D. Redmiles // New Security Paradigms Workshop: proceedings. – ACM Press, 2002. – P. 75-81.
4. Smetters D. Moving from the design of Usable Security Technologies to the Design of Useful Secure Applications / D. Smetters, R. Grinter // New Security Paradigms Workshop: proceedings. – ACM Press, 2002. – P. 82-89.
5. Josang A. Usability and Privacy in Identity Management Architectures / A. Josang, M. AlZomai, S. Suriadi // Australasian Information Security Workshop: proceedings. – 2007. – Vol. 68. – P. 502-517.
6. Security Usability Principles for Vulnerability Analysis and Risk Assessment / Josang A., AlFayyadh B., Grandison T [et.al] // Annual Computer Security Applications Conference: proceedings. – 2007. – P. 473-482.
7. Usability and Security. An Appraisal of Usability Issues in Information Security Methods / E. Shultz, R. Proctor, Mei-Ching Lien [et.al] // Computer and Security. – Elsevier Science Limited, 2001. – Vol.20(7). – pp. 620-634.
8. Гученко І.В. Метод і засіб управління зручністю використання програмних продуктів: дис. ... кандидата технічних наук : 01.05.03 / Гученко Інна Володимирівна. – К., 2012. – 124 с.
9. Systems and software engineering, Systems and software Quality Requirements and Evaluation (SQuaRE), System and software quality models: ISO/IEC 25010:2011. – Geneva: International Organization for Standardization / International Electrotechnical Commission, 2011. – 34p.
10. Padda Harkirat K. QUIM: A Model for Usability/Quality in use Measurement / Harkirat K. Padda. – Colne: Lambert Academic Publishing, 2010. – 124 p.

Стаття надійшла 18.04.2014
Прийнято до друку 06.05.2014

Анотація

Гученко Інна Володимирівна
Системи безпеки інформації в аспекті зручності використання програмного забезпечення

Стаття присвячена проблемі зручності використання систем інформаційної безпеки. Показано важливість зручності використання програмного забезпечення для успішного виконання користувачами задач безпеки інформації. Проаналізовано принципи зручності використання, пов'язані з безпекою. Досліджено проблемні питання зручності використання програмного забезпечення, що впливають на виконання завдань інформаційної безпеки. Проведено зіставлення вимог, що накладаються на користувачів при застосуванні відповідних методів виконання задач безпеки інформації, з визначеннями властивостей зручності використання програмного забезпечення. Досліджено види залежностей між чисельними характеристиками властивостей зручності використання та якістю виконання завдань інформаційної безпеки. Вказано майбутнє застосування результатів дослідження.

Ключові слова: зручність використання програмного забезпечення, безпека, система безпеки інформації, завдання безпеки, користувач, властивості зручності використання.

Аннотация

Гученко Инна Владимировна

Системы безопасности информации в аспекте удобства использования программного обеспечения

Статья посвящена проблеме удобства использования систем информационной безопасности. Показана важность удобства использования программного обеспечения для успешного выполнения пользователями задач безопасности информации. Проанализированы принципы удобства использования, связанные с безопасностью. Исследованы проблемные вопросы удобства использования программного обеспечения, которые влияют на выполнение задач информационной безопасности. Проведено сопоставление требований, налагаемых на пользователей при применении соответствующих методов выполнения задач безопасности информации, с определениями свойств удобства использования программного обеспечения. Исследованы виды зависимостей между численными характеристиками свойств удобства использования и качеством выполнения задач информационной безопасности. Указано будущее применения результатов исследования.

Ключевые слова: *удобство использования программного обеспечения, безопасность, система безопасности информации, задачи безопасности, пользователь, свойства удобства использования.*

НАШІ АВТОРИ

,

Барболіна
Тетяна
Миколаївна кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри математичного аналізу та інформатики Полтавського національного педагогічного університету імені В.Г.Короленка

Безпальчук
Володимир
Миколайович аспірант Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького; викладач кафедри прикладної математики та інформатики

Головня
Борис
Петрович доктор техн. наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформатики Черкаського національного університету ім. Богдана Хмельницького

Гнатівська
Ганна
Арнольдівна к.т.н., доцент кафедри інформатики Одеського державного екологічного університету

Гученко
Інна
Володимирівна к.т.н., доцент кафедри інженерії програмного забезпечення Національного авіаційного університету

Ємець
Олег
Олексійович доктор фіз.-мат. наук, професор, зав. кафедри математичного моделювання і соціальної інформатики Полтавського університету економіки і торгівлі

Леонова
Марія
Володимирівна старший лаборант кафедри математичного аналізу та інформатики Полтавського національного педагогічного університету імені В.Г. Короленка

Лук'янов
Павло
Володимирович канд. фіз.-мат.наук, ст. наук. співр. Інституту гідромеханіки НАНУ

Лук'янов
Петро
Володимирович канд. фіз.-мат.наук, ст. наук. співр. Інституту гідромеханіки НАНУ

Манько
Марина
Олександрівна аспірантка кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій управління Черкаського державного технологічного університету

Назаренко Олександр Максимович	кандидат фіз.-мат. наук, доцент Сумського державного університету
Небилиця Антон Юрійович	аспірант кафедри прикладної математики та інформатики Черкаського національного університету ім. Богдана Хмельницького
Панченко Борис Євгенівич	доктор фіз.-мат. наук, стар.наук.співр. Інституту кібернетики НАНУ
Пилипенко Світлана Олександрівна	магістрант Сумського державного університету
Триус Юрій Васильович	доктор пед. наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій управління Черкаського державного технологічного університету
Хайдуров Владислав Володимирович	аспірант кафедри прикладної математики та інформатики Черкаського національного університету ім. Богдана Хмельницького

ЗМІСТ

СЕКЦІЯ «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

О.О. Ємець, Т.М.Барболіна

ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ
ДИРЕКТОРА ЗІ СТОХАСТИЧНИМИ ПАРАМЕТРАМИ 3

О.О. Ємець, М.В. Леонова

СИМЕТРИЯ ПЕРЕСТАВНИХ МНОГОГРАННИКІВ ТА ЇХ КОМБІНАТОРНИЙ
ТИП 12

А.М. Назаренко, Б.Е. Панченко, С.А. Пилипенко

СХЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ SH-ВОЛНЫ
НА СИСТЕМЕ НЕКРУГОВЫХ ЖЕСТКИХ ВСТАВОК В БЕСКОНЕЧНОЙ
УПРУГОЙ СРЕДЕ 22

Павел В. Лукьянов

ЗАВИСИМОСТЬ ДИНАМИКИ СУБМЕЗОМАСШТАБНОГО
КОМПАКТНОГО ВИХРЯ ОТ ЕГО ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ 32

Петр В. Лукьянов

ВЛИЯНИЕ ПРИСОЕДИНЕННОГО КОНЦЕВОГО ВИХРЯ ЛОПАСТИ
РОТОРА ВЕРТОЛЕТА НА ГЕНЕРАЦИЮ BVI-ШУМА 46

А.Ю. Небилиця

ОПТИМІЗАЦІЯ МЕТОДУ ВИДІЛЕННЯ МІНІМАЛЬНИХ СЕГМЕНТІВ
МОВНОГО ПОТОКУ 59

В.М. Безпальчук

МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ УМОВ НАПИЛЕННЯ НА ПРОЦЕС
ФАЗОУТВОРЕННЯ В СИСТЕМІ NI-AL МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЇ
ДИНАМИКИ 68

А.А. Гнатовская

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАСКАДНОГО ТЕРМО-
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО УСТРОЙСТВА В САПР КРИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ 79

Б.П. Головня, В.В. Хайдуров

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ
ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ 87

СЕКЦІЯ «ІНФОРМАТИКА»

Ю.В. Триус, М.О. Манько

WEB-ОРІЄНТОВАНА КОНСУЛЬТАЦІЙНА ЕКСПЕРТНА СИСТЕМА З
МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ 99

I.V. Guchenko

USABILITY ASPECT OF INFORMATION SECURITY SYSTEMS 115

НАШІ АВТОРИ 121

CONTENTS

APPLIED MATHEMATICS SECTION

O.O. Iemets, T.M. Barbolina

CONSTRUCTION AND RESEARCH OF MATHEMATICAL MODEL OF
DIRECTOR'S TASK WITH STOCHASTIC PARAMETERS 3

O. A. Iemets, M. V. Leonova

SYMMETRY OF PERMUTATIONS POLYHEDRONS AND THEIR
COMBINATORIAL TYPE 12

A.M. Nazarenko, B.E. Panchenko, S.A. Pilipenko

SCHEME OF PARALLEL COMPUTING OF THE PROBLEM OF
DIFFRACTION OF SH WAVES ON A SYSTEM OF NON-CIRCULAR STIFF
INCLUSIONS IN AN INFINITE ELASTIC MEDIUM 22

Pavel V. Lukianov

THE EFFECT OF INTERNAL STRUCTURE ON SUBMESOSCALE VORTEX
DYNAMICS 32

Petro V. Lukianov

INFLUENCE OF THE HELICOPTER'S ROTOR BLADE TIP BOUND VORTEX
ON BVI-NOISE GENERATION 46

A. Yu. Nebylytsia

OPTIMIZATION OF MINIMAL SEGMENTS LOCALIZATION OF SPEECH
STREAM METHOD 59

V.M. Bezpachuk.

MD STUDY OF DEPOSITION CONDITIONS EFFECT ON PHASE
COMPETITION IN NI-AL REACTION 68

A.A. Gnatovskaya

THE ALGORITHM OF CALCULATING THE CASCADE THERMOELECTRIC
DEVICE IN CAD SYSTEMS CRITICAL 79

B.P. Golovnya, V.V. Haydurov

EFFECTIVE METHOD FOR SOLVING NONLINEAR INVERSE HEAT
CONDUCTION PROBLEM 87

INFORMATICS SECTION

Y. Tryus, M. Manko

WEB-ORIENTED CONSULTING RXPRT SYSTEM FOR METHODS OF
OPTIMIZATION 99

I.V. Guchenko

USABILITY ASPECT OF INFORMATION SECURITY SYSTEMS 115

INFORMATION ABOUT AUTHORS 121

**ВІСНИК
ЧЕРКАСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ**

Серія прикладна математика. Інформатика
№ 18 (311). 2014

Відповідальний за випуск:
Головня Б. П.

Відповідальний секретар:
Сердюк О. А.

Комп'ютерне верстання
Сердюк О. А.

Підписано до друку 29.12.2014. Формат 84x108/16.
Ум. друк. арк. 12,0. Тираж 300 пр. Зам. № 5228

Видавець і виготівник видавничий відділ
Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького
Адреса: 18000, м. Черкаси, бул. Шевченка, 81, кімн. 117,
Тел. (0472) 37-13-16, факс (0472) 37-22-33,
e-mail: vydav@cdu.edu.ua, <http://www.cdu.edu.ua>
Свідоцтво про внесення до державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК №3427 від 17.03.2009 р.