ISSN 2076-5886

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Черкаський національний університет
Імені Богдана Хмельницького

ВІСНИК ЧЕРКАСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА. ІНФОРМАТИКА

Науковий журнал

Виходить 40 разів на рік

Заснований у березні 1997 року

№ 38 (331).2014

Черкаси – 2014

Науковий журнал містить статті, в яких розглядаються проблеми фізико-математичних та технічних наук.

Для широкого кола математиків та інформатиків – науковців, викладачів, аспірантів, студентів та пошукачів.

Постановою президії ВАК України від 26.05.2010 р. № 1-05/4 (Бюлетень ВАК України, 2010, № 6) журнал включено до переліку наукових фахових видань зі спеціальності «Прикладна математика» та «Інформатика».

Журнал рекомендовано до друку вченою радою Черкаського національного університету (протокол № 1 від 29.08.2013 р.)

Головна редакційна колегія:

д.пед.н., проф., чл.-кор. НАПНУ А.І. Кузьмінський (головний редактор), д.пед.н., проф. Н.А. Тарасенкова (заступник головного редактора), к.ф.-м.н., доц. О.О. Богатирьов (відповідальний секретар), д.б.н., проф., чл.-кор. НАПНУ Ф.Ф. Боєчко, д.ф.-м.н., проф. А.М. Гусак, д.е.н., проф. І.І. Кукурудза, д.б.н., проф. В.С. Лизогуб, д.філос.н., проф. О.В. Марченко, д.і.н., проф. В.В. Масненко, д.х.н., проф. Б.П. Мінаєв, д.філол.н., проф. О.О. Селіванова, д.філол.н., проф. В.Т. Поліщук, д.т.н., проф. А.Ю. Чабан.

Редакційна колегія серії:

Головня Б.П., д.т.н., (відповідальний редактор); Гришко Л.В., к.пед.н., доц. (відповідальний секретар); Гусак А.М., д.ф.-м.н., проф.; Соловйов В.М., д.ф.-м.н., проф.; Стеблянко П.О., д.ф.-м.н., проф.; Лагно В.І., д.ф.-м.н., проф.; Мовчан В.Т., д.ф.-м.н., проф.; Кузьмук В.В., д.т.н., проф.; Тесля Ю.М., д.т.н., проф.; Златкін А.А., д.т.н., проф.; Єршов С.В., д.т.н., проф.; Гаєв Є.О., д.т.н., проф.; Leszczyński H., prof., dr hab; Danielewski M., prof., dr hab., inż; Заурбеков Н.С., д.т.н., проф; Шрайбер О.А., д.т.н., проф.; Круковський П.Г., д.т.н., проф.; Приходько О.А., д.ф.-м.н., проф.; Богатирьов О.О., к.ф.-м.н., доц.; Авраменко В.С., к.ф.-м.н., доц.; Лещенко Ю.Ю., к.ф.-м.н., доц.; Онищенко Б.О., к.ф.-м.н., доц.; Супруненко О.О., к.т.н., доц.

За зміст публікації відповідальність несуть автори.

Засновник – Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16161-4633 ПР від 11.12.2009 р.

Адреса редакційної колегії:

18000, Черкаси, бульвар Шевченка, 79, Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького, математичний факультет, кафедра прикладної математики та інформатики. Тел (0472) 36-13-55.

© Черкаський національний університет, 2014

СЕКЦІЯ «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

УДК 514.182 **С.В. Залевський**

МОДЕЛЮВАННЯ ЧАРУНКИ КООРДИНАТНОЇ СІТКИ U І V ПОВЕРХНЕЮ КУНСА І ПОБУДОВА ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ

Розглядається питання моделювання чарунки координатної сітки поверхнею Кунса, як один із засобів універсального методу геометричного і технологічного опрацювання поверхонь, визначенних упорядкованним каркасом точок. Запропоновано алгоритм побудови геодезичних ліній на поверхні.

Ключові слова – *точковий каркас, поверхня Кунса, сітка, чарунка, лінійна інтерполяція, геодезична, паралельне перенесення вектора.*

Вступ

Велике різномаїття поверхонь технічних форм і способів їх задання породжує і велику кількість розрахункових алгоритмів та програм, що, в свою чергу, створює певні труднощі при розв'язанні інженерно-геометричних задач.

Найбільш універсальним способом задання поверхні, максимально незалежним від варіанту її утворення є задання поверхні упорядкованим каркасом точок. Ці точки є вершинами криволінійних координатних чотирикутників на які координатна сітка u і v розбиває поверхню $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$.

Мета статті

Метою даної роботи є аналітичне представлення відсіків незакономірної поверхні, заданої упорядкованим каркасом точок, поверхнями Кунса. Це дозволяє здійснювати розв'язок інженерно геометричних задач, зокрема будувати геодезичні лінії на поверхні. Вони можуть бути використані для обробки поверхні на станках з ЧПУ, так як робочий орган має рухатися по найкоротших траєкторіях на поверхні.

Виклад основного матеріалу

Нехай незакономірна поверхня задана каркасом опорних точок - вершин криволінійних чотирикутників, на які координатна сітка u і v розбиває поверхню (Рис.1).

Розглянемо криволінійний чотирикутник, визначений точками $A_{i,j}, A_{i+1,j}, A_{i,j+1}, A_{i+1,j+1}$. Уведемо на ньому власну систему криволінійних координат u,v, де $0 \le u,v \le 1$, таким чином, щоб точка $A_{i,j}$ мала криволінійні координати $(0,0), A_{i+1,j}(1,0), A_{i,j+1}(0,1), A_{i+1,j+1}(1,1)$ (Рис. 2).

Тоді рівняння граничних прямих $A_{i,j}, A_{i+1,j}$ і $A_{i,j+1}, A_{i+1,j+1}$ - координатних ліній u $(v = const)$ запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \vec{r}(u,0) &= (1-u)\cdot\vec{r}(0,0) + u\cdot\vec{r}(1,0) \\ \vec{r}(u,1) &= (1-u)\cdot\vec{r}(0,1) + u\cdot\vec{r}(1,1) \end{aligned},$$

де $\vec{r}(0,0), \vec{r}(0,1), \vec{r}(1,0), \vec{r}(1,1)$ радіуси-вектори вершин криволінійного чотирикутника.

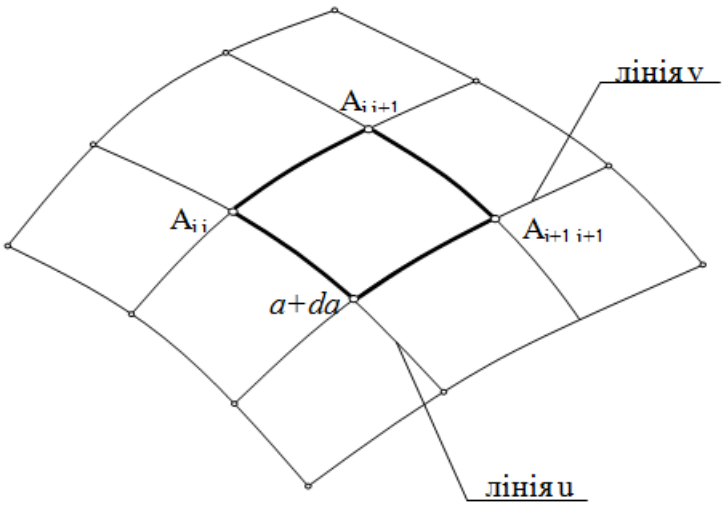


Рис. 1 Визначення чарунки координатної сітки u і v на поверхні

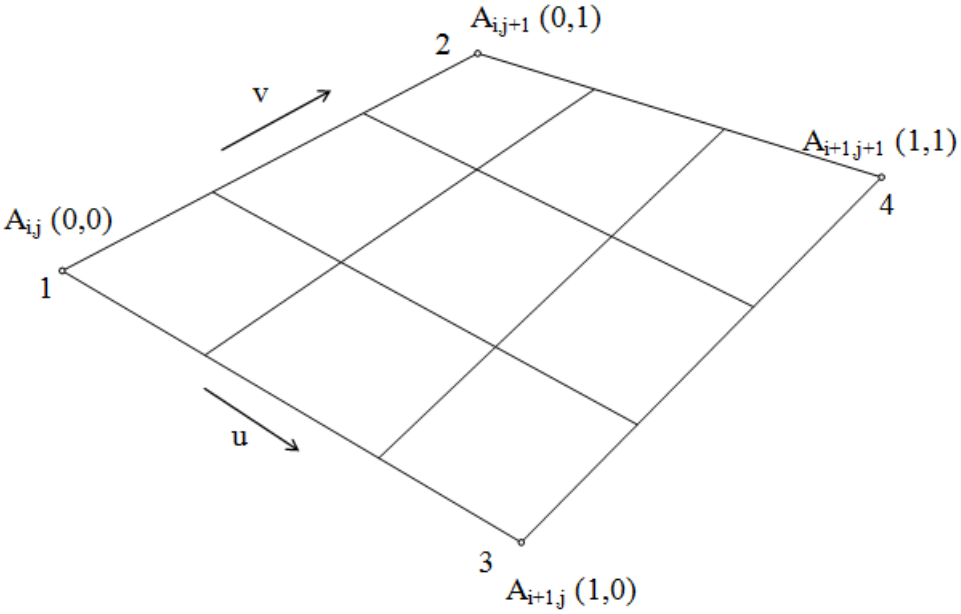


Рис. 2 Моделювання чарунки координатної сітки u і v поверхнею

Лінійна інтерполяція в напрямі v матиме вигляд:

$$\vec{r}(u,v)=(1-v)\cdot\vec{r}(u,0)+v\cdot\vec{r}(u,1)=$$
$$=(1-u)\cdot(1-v)\cdot\vec{r}(0,0)+(1-v)\cdot u\cdot\vec{r}(1,0)+v\cdot(1-u)\cdot\vec{r}(0,1)+u\cdot v\cdot\vec{r}(1,1)$$

Остаточно рівняння відсіку поверхні Кунса з граничними прямолінійними відрізками матиме вигляд:

$$\vec{r}(u,v)=\vec{r}(0,0)+(\vec{r}(1,0)-\vec{r}(0,0))\cdot u+(\vec{r}(0,1)-\vec{r}(0,0))\cdot v+ \qquad (1)$$
$$+(\vec{r}(0,0)+\vec{r}(1,1)-\vec{r}(0,1)-\vec{r}(1,0))\cdot u\cdot v$$

або в координатній формі:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_3 - x_1)\cdot u + (x_2 - x_1)\cdot v + [(x_4 - x_3) + (x_2 - x_1)]\cdot u\cdot v \\ y &= y_1 + (y_3 - y_1)\cdot u + (y_2 - y_1)\cdot v + [(y_4 - y_3) + (y_2 - y_1)]\cdot u\cdot v \\ z &= z_1 + (z_3 - z_1)\cdot u + (z_2 - z_1)\cdot v + [(z_4 - z_3) + (z_2 - z_1)]\cdot u\cdot v \end{aligned} \qquad (2)$$

де x_i, y_i, z_i (i=1,2,3,4)- координати вершин криволінійного чотирикутника $A_{i,j}, A_{i+1,j}, A_{i,j+1}, A_{i+1,j+1}$ відповідно.

Для скорочення запису рівнянь (2) і зручності їх практичного використання покладемо:

$$\begin{array}{lll} a_1 = x_2 - x_1 & a_2 = y_2 - y_1 & a_3 = z_2 - z_1 \\ b_1 = x_3 - x_1 & b_2 = y_3 - y_1 & b_3 = z_3 - z_1 \\ c_1 = (x_4 - x_3) - (x_2 - x_1) & c_2 = (y_4 - y_3) - (y_2 - y_1) & c_3 = (z_4 - z_3) - (z_2 - z_1) \end{array}$$

Тоді рівняння (2) перепишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + b_1\cdot u + a_1\cdot v + c_1\cdot u\cdot v, \\ y &= y_1 + b_2\cdot u + a_2\cdot v + c_2\cdot u\cdot v, \\ z &= z_1 + b_3\cdot u + a_3\cdot v + c_3\cdot u\cdot v. \end{aligned} \qquad (3)$$

Розглянемо побудову геодезичної лінії на поверхні (3), використавши наступну її властивість: дотична до геодезичної лінії при її паралельному перенесенні уздовж неї залишається дотичною.

Напрям геодезичної лінії будемо визначати відношенням диференціалів криволінійних координат $du : dv$, або $dv : du$ в заданій точці $M_0(u_0, v_0) = M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Тоді напрямний вектор геодезичної матиме вигляд $d\vec{r} = r_t du + r_s dv$. Його координати:

$$l_t = x_u du + x_v dv \ ,$$

$$m_t = y_u du + y_v dv \ ,$$

$$n_t = z_u du + z_v dv \ ,$$

де $x_u = b_1 + c_1 v$, $x_v = a_1 + c_1 u$, $y_u = b_2 + c_2 v$, $y_v = a_2 + c_2 u$, $z_u = b_3 + c_3 v$, $z_v = a_3 + c_3 u$.

Нормаль $\vec{N}(l_n, m_n, n_n)$ до поверхні в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має координати

$$l_n = y_u z_v - y_v z_u \ ,$$

$$m_n = x_v z_u - x_u z_v \ ,$$

$$n_n = x_u y_v - x_v y_u \ .$$

Нормальна площина в напрямі $d\vec{r}$ матиме рівняння

$$a_n x + b_n y + c_n z + d_n = 0, \tag{4}$$

де $a_n = m_n n_t - m_t n_n$, $b_n = l_t n_n - l_n n_t$, $c_n = l_n m_t - l_t m_n$, $d_n = -(x_0 a_n + y_0 b_n + z_0 c_n)$.

Для обчислення точки геодезичної лінії на заданій відстані l від початкової точки M_0 знаходимо точку перетину площини (4) з координатною лінією $u_1 = u_0 + du$ і

$$v_1 = -\frac{a_n(x_1 + b_1 u_1) + b_n(y_1 + b_2 u_1) + c_n(z_1 + b_3 u_1) + d_n}{a_n(a_1 + c_1 u_1) + b_n(a_2 + c_2 u_1) + c_n(a_3 + c_3 u_1)} \tag{5}$$

Обчислимо відстань dl між точками $M_0(u_0, v_0)$ і $M_1(u_1, v_1)$.

$$dl_1 = \sqrt{(x_0 - x_{M_1})^2 + (y_0 - y_{M_1})^2 + (z_0 - z_{M_1})^2} \tag{6}$$

Якщо $dl > l$, то знаходимо точку M_p на хорді $M_0 M_1$, за формулою

$$u_p = \frac{l}{dl}(u_1 - u_2) + u_0 \tag{7}$$

Обчислюємо точку M_p перетину площини (4) з координатною лінією u_p і знаходимо відстань dl_2 між точками M_0 і M_k. Якщо $dl_2 > l$, то повторюючи обчислення (5), (6) і (7), з находимо dl_3 і так далі, аж доки $dl_n < l$. Останнє значення u_p вибираємо як u_1 шуканої точки M_1. Переносимо напрям $\vec{l} = (l_t, m_t, n_t)$ паралельно на поверхні із точки M_0 в точку M_1.

Розглянемо паралельне перенесення вектора на поверхні, яке є природнім узагальненням паралельного перенесення вектора на площині.

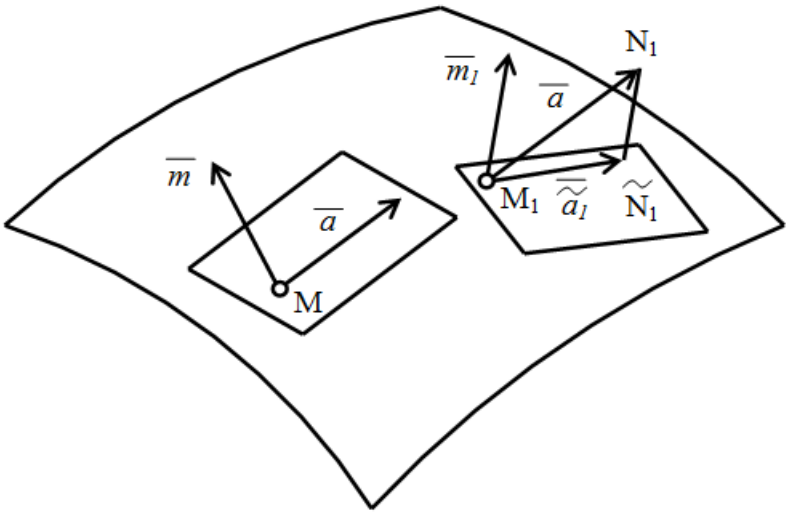


Рис. 3 Паралельне перенесення вектора на поверхні.

Нехай в точці $M(u^1, u^2)$ поверхні $d\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$ заданий вектор $\vec{a}$, який належить поверхні, тобто розміщений у дотичній площині Σ до поверхні в точці M. Перенесемо

вектор $\vec{a}$ паралельно у звичайному сенсі у нескінченно близьку точку $M_1\left(u^1+du^1, u^2+du^2\right)$. Він займе деяке положення $\overrightarrow{MN}$ і уже не буде належати поверхні, „зійде” з поверхні. Щоб опустити вектор $\overrightarrow{M_1N_1}$ на поверхню, спроекціюємо його ортогонально на дотичну площину, проведену в точці M_1. Саме цей вектор $\overrightarrow{M_1\tilde{N}_1}=\vec{\tilde{a}}$ вважають вектором, одержаним паралельним перенесенням вектора $\vec{a}$ на поверхні із точки M у нескінченно близьку точку M_1 (Рис. 3).

Якщо $\overrightarrow{m_1}$ одиничний вектор нормалі до поверхні в точці M_1, то $\vec{\tilde{a}}=\vec{a}-\overrightarrow{m_1}\left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{m_1}\right)$. Так як $\overrightarrow{m_1}=\vec{m}+d\vec{m}$, де $\vec{m}$ - одиничний вектор нормалі до поверхні в точці M, а $d\vec{m}$ - приріст, який отримав вектор $\vec{m}$ при переміщенні із точки M в нескінченно близьку точку поверхні M_1, то

$$\left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{m_1}\right)=\left(\vec{a}\left(\vec{m}+d\vec{m}\right)\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{m}\right)+\left(\vec{a}\cdot d\vec{m}\right)=\left(\vec{a}\cdot d\vec{m}\right), \text{ бо } \left(\vec{a}\cdot\vec{m}\right)=0.$$

Далі:

$$\overrightarrow{m_1}\cdot\left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{m_1}\right)=\left(\vec{m}+d\vec{m}\right)\cdot\left(\vec{a}\cdot d\vec{m}\right)=\vec{m}\cdot\left(\vec{a}\cdot d\vec{m}\right)+d\vec{m}\cdot\left(\vec{a}\cdot d\vec{m}\right)$$

Відкинувши нескінченно малу 2-го порядку, одержимо:

$$\overrightarrow{m_1}\cdot\left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{m_1}\right)=\vec{m}\cdot\left(\vec{a}\cdot d\vec{m}\right) \text{ і } \vec{\tilde{a}}=\vec{a}-\vec{m}\cdot\left(\vec{a}\cdot d\vec{m}\right).$$

Таким чином, для паралельного перенесення вектора $\vec{a}$ на поверхні із точки M поверхні у нескінченно близьку точку M_1, необхідно після звичайного паралельного перенесення вектора $\vec{a}$ впросторі відняти складову по нормалі $\vec{a}$ в точці M.

Проведемо на поверхні через точку М довільну криву γ: $u^1=u^1(t), u^2=u^2(t)$. При переміщенні вектора $\vec{a}$ по кривій γ із точки М у нескінченно близьку точку М1 він отримає приріст $\vec{a}+d\vec{a}$. Відкладемо вектор $\vec{a}+d\vec{a}$ в точці М і розкладемо його на складові: одну в дотичній площині Σ –тангенціальну складову $\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)^{\tau}$, а другу - направлену паралельно нормалі $\vec{m}$ в точці М — нормальну складову (Рис. 4).

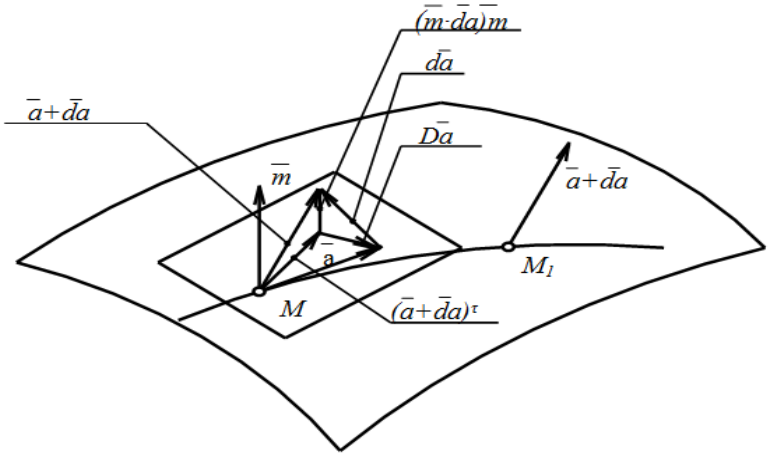


Рис.4 Геометрична інтерпретація абсолютного диференціала $D\vec{a}$

Нормальна складова має вигляд:

$$\left(\vec{m}\cdot\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)\right)\cdot\vec{m}=\left(\left(\vec{m}\cdot\vec{a}\right)+\left(\vec{m}d\vec{a}\right)\right)\cdot\vec{m}=\left(\vec{m}\cdot d\vec{a}\right)\cdot\vec{m},.$$

Віднявши від вектора $\vec{a}+d\vec{a}$ нормальну складову , одержимо його тангенціальну складову $\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)^{\tau}=\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)-\left(\vec{m}\cdot d\vec{a}\right)\vec{m}$, тобто вектор одержаний проекціюванням вектора $\vec{a}+d\vec{a}$ на дотичну площину до поверхні в точці *M*. Позначимо різницю між вектором $\vec{a}$ і $\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)^{\tau}$ через $D\vec{a}$. Цю різницю називають абсолютним (коваріантним) диференціалом вектора $\vec{a}$, який відповідає переміщенню вектора $\vec{a}$ із точки *M* у нескінченно близьку точку M_1 по кривій γ. Абсолютний диференціал розміщений у дотичній площині до поверхні в точці *M*. Як видно із рис. 4 він є ортогональною проекцією повного диференціала $d\vec{a}$ на дотичну площину в точці *M*.

Якщо $D\vec{a}=0$, то тангенціальна складова $\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)^{\tau}$ збігається з вихідним вектором $\vec{a}=\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)^{\tau}$. Очевидно, рівність $D\vec{a}=0$ можлива лише у випадку, якщо повний диференціал $d\vec{a}$ направлений по нормалі $\vec{m}$ до поверхні в точці *M*. Тоді при проекціюванні вектора $\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)$ на дотичну площину в точці *M* ми одержимо вектор $\vec{a}$. А це означає, що вектор $\vec{a}+d\vec{a}$ є вектор $\vec{a}$ паралельно перенесений по кривій γ на поверхні із точки *M* у нескінченно близьку точку M_1. Таким чином, щоб паралельно перенести вектор $\vec{a}$ із точки *M* в нескінченно близьку точку M_1, необхідно у дотичній площині до поверхні в точці M_1 провести вектор $\vec{\tilde{a}}$, який ортогонально проекціюється на дотичну площину в точці *M* у вектор $\vec{a}$.

Використовуючи цей факт запропонуємо алгоритм побудови вектора, паралельно перенесеного із точки *M* в точку M_1.

Проекціюємо ортогонально точку M_1 на дотичну площину Σ до поверхні в точці M.

Із проекції M'_1 точки M_1 проводимо вектор $\vec{a}'_1$, паралельний вектору $\vec{a}_1$. Цей вектор є проекцією вектора, перенесеного паралельно із точки M в точку M_1.

У дотичній площині до поверхні в точці M_1 за проекцією $\vec{a}'_1$ і напрямом ортогонального проекціювання до площини Σ будуємо вектор $\vec{a}_1$, рівний за довжиною вектору $\vec{a}$.

Цей вектор вибираємо за новий напрям геодезичної лінії в точці M_1. Далі повторюємо попережні обчислення і знаходимо точку M_2 геодезичної і т. д.

Процес побудови закінчується при досягненні границі чарунки. В результаті, ми одержали геодезичну лінію, задану точками, розміщеними на однаковій відстані l одна від одної.

Очевидно, запропонований спосіб може бути використаний для побудови геодезичної лінії на довільній поверхні, рівняння якої має вигляд $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$.

Висновки

Запропоновано спосіб моделювання відсіку поверхні, заданої каркасом точок,

поверхнею Кунса. Розглянуто питання визначення початкового напряму геодезичної лінії і алгоритм побудови точок геодезичні лінії із заданим кроком.

Література

1. Ванин В.В. Геометрическое моделирование и построение разверток тканных покрытий неразвертывающихся поверхностей: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук // Киев, 1971.
2. Залевський С.В. Геометричне моделювання тканинних наповнювачів текстолітових конструкцій технічних виробів: дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук // Київ, 2011.
3. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей. ч.1,2. / Каган В.Ф. // М-Л.,ГИТТЛ, 1947-1948г.
4. Залевський С.В. Геометричне моделювання формоутворення оболонок нерозгортних поверхонь, виготовлених із композиційних матеріалів на тканинній основі / Залевський С.В. // Праці ТДАУ – вип.. 4, т57.- Мелітополь, 2013 .-с. 100-103.

Стаття надійшла _08_._09_._2014___
Прийнято до друку _07_._19_._2014___

Аннотация

Залевский С.В.

Моделирование ячейки координатной сетки U и V поверхностью Кунса и построение геодезических линий

Предложен способ моделирования участка поверхности, заданной упорядоченным каркасом точек, поверхностью Кунса с граничными прямолинейными отрезками. Рассматривается вопрос определения начального направления геодезической линии. Построение геодезической линии базируется на ее свойстве: касательная к геодезической при ее параллельном перенесении остается касательной. Предложен алгоритм построения вектора, параллельно перенесенного из точки M в точку M_1. Рассмотрен вопрос геометрической интерпретации абсолютного диференциала вектора. Приводится алгоритм построения точек геодезической линии с заданным шагом до пересечения с границей ячейки Кунса.

Ключевые слова: *Каркас точек, поверхность Кунса, сетка, ячейка, линейная интерполяция, геодезическая линия, параллельное перенесение вектора.*

Summary

S. V. Zalevsky

Accuracy estimation of approximation of surface specified by systematized point frame

Suggested a method of modeling of the surface area, given an ordered by framework points of Coons surface with of boundary line segments. The question of determining the initial direction of the geodesic line. The construction of a geodesic is based on its properties: the tangent to the geodesic at its parallel displacement remains tangent. An algorithm for constructing a vector parallel to the suffering of the point M to the point M_1. The question of the geometric interpretation of the absolute differential locks vector. An algorithm for constructing geodesic points at a predetermined pitch to the intersection with the boundary of the cell Koons.

Key words: *point frame, of surface Koons, grid, cell, linear interpolation, the geodesic line, arallel displacement vector.*

УДК. 536.23 **Б.П.Головня**

МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ТУРБУЛЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Автором была предложена модель турбулентности, основанная на концепции турбулентной вязкости и корректно воспроизводящая каскадный процесс. Вычислительные эксперименты показали, что возможности ее ограничены. В данной работе предлагается модель переноса турбулентных напряжений.

Ключевые слова: *моделирование турбулентности, RANS модели, модели переноса турбулентных напряжений*

Вступление

В моделях $k-\varepsilon$ типа предполагается, что для описания турбулентности в точке достаточно знать один масштаб скорости, а компоненты напряжений Рейнольдса можно выразить через этот масштаб с помощью соотношения Колмогорова-Прандтля для турбулентной вязкости. Однако перенос отдельных компонент напряжений не всегда отражается этим соотношением адекватно, если даже верно описан перенос масштаба скорости. Нужно принять во внимание разницу в эволюции различных компонент напряжений Рейнольдса (представляющих различные масштабы скоростей в сложных течениях) и уметь надлежащим образом учесть перенос этих компонент. Для этого применяются модели, использующие уравнения переноса для отдельных компонент турбулентных напряжений $\overline{u_i u_j}$. Модели, основанные на этих уравнениях, часто относят к схемам замыкания второго порядка. Уравнения для корреляций $\overline{u_i u_j}$ могут быть выведены точно, Вывод точных уравнений имеет то преимущество, что в уравнениях автоматически появляются члены, учитывающие массовые силы, вращательное движение и другие факторы. Но, тем не менее, для получения замкнутой системы в точные уравнения нужно ввести еще и модельные соотношения.

К сожалению, модели турбулентности, основанные на уравнениях переноса $\overline{u_i u_j}$, довольно сложны. Поэтому эти модели, несмотря на их большие потенциальные возможности, редко используются на практике как таковые.

Цель работы

Целью работы является разработка модели турбулентности обладающей повышенными вычислительными возможностями.

Модель переноса турбулентных напряжений без учета воздействия стенок

В работах [1]-[3] автором предложена модель турбулентности k-ε, корректно воспроизводящая закономерности каскадного переноса энергии турбулентности. В данной работе, на основе предложенных идей, автором предлагается модель для расчета турбулентных напряжений.

Полное уравнение переноса турбулентных напряжений выводится на основе уравнений Навье-Стокса. Для его вывода необходимо точное уравнение переноса компоненты импульса в направлении x_i умножить на компоненту скорости U_j,

уравнение переноса компоненты импульса в направлении x_j умножить на U_i и результаты сложить. В итоге получаем:

$$U_j \frac{\partial U_k U_i}{\partial x_k} + U_i \frac{\partial U_k U_j}{\partial x_k} = \nu U_j \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} + \nu U_i \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{1}{\rho} U_j \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} U_i \frac{\partial P}{\partial x_j} + U_j F_i + U_i F_j \quad (1)$$

Проводя с уравнением (1) преобразования, совпадающие по смыслу и содержанию с преобразованиями, использовавшимися при выводе уравнения переноса энергии турбулентности, получаем уравнение переноса турбулентных напряжений:

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = \underbrace{\nu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \overline{u_i u_j}}_{\mathbf{1}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j u_k}}_{\mathbf{2}} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \overline{u_i p}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j p}}{\partial x_i} \right)}_{\mathbf{3}} -$$

$$\underbrace{-\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k}}_{\mathbf{4}} \underbrace{- \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{\mathbf{5}} + \underbrace{\overline{\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}}_{\mathbf{6}} \underbrace{- 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}}_{\mathbf{7}} \quad (2)$$

Слагаемые уравнения описывают:

1 – вязкую диффузию,

2 и 3 – турбулентную диффузию,

4 и 5 – генерацию за счет взаимодействия со средним течением,

6 – перераспределение за счет взаимодействия пульсаций скорости и давления,

7 – скорость диссипации.

В дальнейшем для слагаемых будут использоваться следующие обозначения: $Diff_{turb}$ – оператор турбулентного диффузионного переноса; P_{ij} – генерация; ε_{ij} – скорость диссипации $\overline{u_i u_j}$; π_{ij} - перераспределение.

Значения генерационного члена вычисляются по точным соотношениям:

$$P_{ij} \equiv -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}. \quad (3)$$

Турбулентная диффузия, перераспределение за счет взаимодействия пульсаций скорости и давления и скорость диссипации должны моделироваться.

В данной работе для вычисления перераспределения использовалось известное соотношение Ротта [4] :

$$\pi_{ij} = -C_a \frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3}\delta_{ij} k \right). \quad (4)$$

Теперь уравнение переноса $\overline{u_i u_j}$ можно переписать в виде:

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_n \partial x_n} + Diff_{turb}\left(\overline{u_i u_j}\right) + P_{ij} - C_a \frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3}\delta_{ij} k \right) - \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

Уравнение переноса скорости диссипации ε_{ii}

Потребуем, чтобы полусумма уравнений переноса $\overline{u_i u_i}$ совпадала с уравнением переноса *k*. Отсюда следует необходимость выполнения равенства $\sum \varepsilon_{ii} = 2\varepsilon$.

Известное соотношение $\varepsilon_{ii} = 2/3\varepsilon$ полностью удовлетворяет этому требованию, но тестовые расчеты показывают, что от его использования лучше отказаться.

В данной модели было решено использовать для диссипативных слагаемых ε_{ii} специальное уравнение переноса. Точное уравнение переноса скорости диссипации отдельных компонент тензора турбулентных напряжений, выводится из уравнений Навье-Стокса и имеет вид:

$$\frac{D\varepsilon_{ij}}{D\tau} = \underbrace{\left\{\nu \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_k}\right\}}_{1} + \underbrace{\left\{-\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_k \varepsilon'_{ij}}\right\}}_{2} + \underbrace{\left\{-\frac{2\nu}{\rho}\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_i}}\right)\right\}}_{3} +$$

$$+ \underbrace{\left\{-2\nu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k}\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}} + \frac{\partial U_k}{\partial x_l}\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}}\right)\right)\right\}}_{4}$$

$$+ \underbrace{\left\{-2\nu\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_l}\overline{u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_l}} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_k \partial x_l}\overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_l}}\right)\right\}}_{5} + \underbrace{\left\{-2\nu\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_l}\overline{u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_l}} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_k \partial x_l}\overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_l}}\right)\right\}}_{6}.$$

Согласно рекомендациям Ханъялича и Лаундера [5] слагаемое (6) меньше слагаемых 1-4 на множитель пропорциональный $Re_t^{-0.5}$ а слагаемое (7) на множитель пропорциональный Re_t^{-1}. Поэтому эти слагаемые в дальнейшем исключаются из рассмотрения.

Слагаемое 3, содержащее корреляции с пульсациями давления, преобразуем следующим образом:

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial p}{\partial x_k}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial p}{\partial x_k}}\right)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\left(\overline{p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}\right) + \overline{\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} + \overline{p\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}.$$

Если обозначить три последних слагаемых правой части как $\pi_{\varepsilon ii}$, то из уравнения неразрывности для пульсаций компонент скорости следует, что $\pi_{\varepsilon 11}+\pi_{\varepsilon 22}+\pi_{\varepsilon 33}\equiv 0$. По этой причине эти слагаемые в уравнении переноса ε_{ii} можно интерпретировать (по аналогии с уравнением переноса $\overline{u_i^2}$) как слагаемые, описывающие перераспределение ε_{ii} в результате взаимодействия пульсаций скорости и давления.

Теперь оставшиеся слагаемые уравнения можно записать следующим образом:

$$\frac{D\varepsilon_{ij}}{Dt} = Diff\,(\varepsilon_{ij}) + P_{\varepsilon ij} + \pi_{\varepsilon ij} - \varepsilon_{\varepsilon ij},$$

где

$$Diff\,(\varepsilon_{ij}) \equiv \nu \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_k \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial p}{\partial x_k}} - \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial p}{\partial x_k}}$$ – ффузия ε_{ij},

$$P_{\varepsilon ij} \equiv -2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)}$$ – нерация ε_{ij},

$$\pi_{\varepsilon ij} \equiv 2\nu\left[\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\overline{p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} - \overline{\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} - \overline{p\frac{\partial^2}{\partial x_k x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}\right] -$$

перераспределение ε_{ij} за счет взаимодействия пульсаций давления и скорости,

$$\varepsilon_{\varepsilon ij} \equiv 4\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_k}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_k}}$$ – ссипация ε_{ij}.

Все слагаемые должны моделироваться.

По рекомендациям Роди [6] и по аналогии с моделированием уравнений переноса $\overline{u_i^2}$ и ε объединяем соотношения для генерации, перераспределения и диссипации в одно целое и моделируем следующим образом:

$$P_{\varepsilon ii} + \pi_{\varepsilon ii} - \varepsilon_{\varepsilon ii} = \frac{\varepsilon}{k}\left(C_1\left(P_{ii} + \pi_{ii}\right) - C_2 \varepsilon_{ii}\right)$$

После подстановки всех модельных соотношений уравнение приобретает вид:

$$\frac{D\varepsilon_{ii}}{Dt} = \nu \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_n \partial x_n} + Diff_{turb}\left(\varepsilon_{ii}\right) + \frac{\varepsilon}{k}\left[C_1\left(P_{ii} - C_a \frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i^2} - \frac{2}{3}k\right)\right) - C_2 \varepsilon_{ii}\right] \qquad (6)$$

Из (6) очевидно следует, что сумма уравнений переноса ε_{ii} полностью совпадает с уравнением переноса ε.

В случае $i \neq j$ корреляция $\overline{u_i u_j}$ описывает энергию взаимодействия компонент пульсационной составляющей скорости. Эта энергия не может передаваться по каскадному процессу, так как она возникает в результате взаимодействия конкретных пульсаций в конкретный момент времени. Но во второй главе работы было показано, что ε означает передачу энергии в каскадный процесс. Отсюда следует, что в случае

$i \neq j$ $\varepsilon_{ij} = 0$. Отметим, что равенство $\varepsilon_{ij} = 0$ следует также из изотропности маломасштабных турбулентных движений.

В то же время возникновение корреляции $\overline{u_i u_j}$ $(i \neq j)$ можно схематически описать следующим образом. Представим себе эластичную сферу, подвергаемую периодическим воздействиям в двух диаметрально противоположных точках. Если эти воздействия равны между собой по амплитуде и противоположны по фазе, то центр сферы останется неподвижным. Если воздействия не противофазны, то центр можно считать неподвижным в среднем. В любом случае в центре произведение $\overline{u \times v} = 0$. Но в случае неравенства амплитуд центр начнет двигаться, а произведение скоростей в точке, совпадающей с центром неподвижной сферы, станет неравным нулю. Очевидно, что этот процесс максимизируется, если сфера касается какой-либо твердой поверхности, т.е. одна из точек остается неподвижной.

Расчеты показывают, что диссипативные масштабы первичных вихрей в пристенной области течения больше расстояния до стенки, т.е. эти вихри все время прижаты к стенке. В то же время эти вихри постоянно подвергаются воздействию турбулентных пульсаций, что в сочетании с воздействием стенки и порождает ненулевое значение корреляции $\overline{u_i u_j}$ $(i \neq j)$. Но деформация вихрей непосредственно у стенки очень велика и в результате этого велики пульсации давления внутри вихрей, в пристенной области заметным остается воздействие вязких сил и т.д. Все эти причины порождают пристенное подавление корреляции $\overline{u_i u_j}$, что, в свою очередь, требует введения в уравнение дополнительного слагаемого. Проще всего описать это подавление как часть генерационного слагаемого. Очевидно, что эта часть должна быть связана с расстоянием до стенки. Учитывая эту связь с помощью функции φ, имеем в случае $i \neq j$:

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_n \partial x_n} + Diff_{turb}\left(\overline{u_i u_j}\right) + P_{ij} - C_a \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} - \varphi P_{ij} \tag{7}$$

Учет воздействия стенки на процессы переноса. Модель для турбулентной диффузии

Согласно предложенной теории часть энергии, получаемой от осредненного течения, идет на создание в пограничном слое образований, хорошо соответствующих когерентным структурам. Этот процесс отображается в модели умножением генерационного члена на функцию f_0. В модели переноса турбулентных напряжений в создании компонент энергии $\overline{u_i u_i}$ участвуют одновременно генерационный и перераспределительный члены. В связи с этим на функцию f_0 умножаем их сумму.

Вязкие пристенные взаимодействия отображаются умножением на функцию f_0 диффузионных слагаемых. В разрабатываемой модели пристенные взаимодействия учитываем аналогичным способом.

По всей видимости, одной из наиболее распространенных моделей для турбулентной диффузии является градиентная модель Дейли и Харлоу [7] –

$$Diff_{turb}\left(\overline{u_i u_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k} C_{Diff} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_n} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_n}.$$

В данной работе эта модель использовалась в незначительно упрощенной форме:

$$Diff_{turb}\left(\overline{u_i u_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k} C_{Diff} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k^2} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}. \tag{8}$$

Модельное соотношение (8) требует дополнительных уточнений.

Коэффициент турбулентной диффузии $C_{Diff} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k^2}$ в (8) является аппроксимаций вполне конкретной величины, предположительно пропорциональной турбулентной вязкости. Ясно, что аппроксимация получена частично на основе экспериментальных данных (значения $\overline{u_i u_j}$, $\overline{u_k^2}$ и k), частично на основе расчетов неизмеримой величины ε. Естественно предположить, что при построении аппроксимации значения ε находились на основе одной из традиционных моделей. Но, предполагая процесс равновесным, в первом приближении можно считать, что $\varepsilon_{т.м.} \approx f_0 \varepsilon_{д.м.}$, где индекс “т.м.” означает - “традиционные модели”, а индекс “д.м.” - “данная модель”. Этот факт учитываем в модели для диффузионного члена:

$$Diff_{turb}\left(\overline{u_{0i} u_{0j}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k} C_{Diff} f_0 \frac{k_0}{\varepsilon_0} \overline{u_{0k}^2} \frac{\partial \overline{u_{0i} u_{0j}}}{\partial x_k} \tag{9}$$

Модель для турбулентной диффузии ε_{ii} строим по аналогии с (9) с учетом построения уравнения переноса диссипации в k-ε модели:

$$Diff_{turb}\left(\varepsilon_{0ii}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{C_\varepsilon} C_{Diff} f_0 \frac{k_0}{\varepsilon_0} \overline{u_{0k}^2} \frac{\partial \varepsilon_{0ii}}{\partial x_k}. \tag{10}$$

В итоге модель переноса корреляции $\overline{u_{i0}^2}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{D\overline{u_{0i}^2}}{Dt} = f_0\left(\nu \dfrac{\partial^2 \overline{u_{0i}^2}}{\partial x_i \partial x_i} + Diff_{turb}\left(\overline{u_{0i}^2}\right)\right) + f_0\left(P_{ii} - C_a \dfrac{\varepsilon_0}{k_0}\left(\overline{u_{0i}^2} - \dfrac{2}{3}k_0\right)\right) - \varepsilon_{0ii}, \\ \dfrac{D\varepsilon_{0ii}}{Dt} = f_0\left(\nu \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{0ii}}{\partial x_k \partial x_k} + Diff_{turb}\left(\varepsilon_{0ii}\right)\right) + \dfrac{\varepsilon_0}{k_0}\left[C_1 f_0\left(P_{ii} - C_a \dfrac{\varepsilon_0}{k_0}\left(\overline{u_{0i}^2} - \dfrac{2}{3}k_0\right)\right) - C_2 \varepsilon_{0ii}\right]. \end{cases} \tag{11}$$

Турбулентную диффузию вычисляем согласно выражениям (9) и (10).

Теперь рассмотрим построение модели для переноса напряжений $\overline{u_i u_j}$ $(i \neq j)$. Здесь возникают некоторые отличия.

Во первых. Напряжение $\overline{u_i u_j}$ представляет собой энергию взаимодействия компонент пульсации. Эта энергия возникает только при наличии в течении конкретных пульсаций и не может передаваться по цепочке вихрей (первичные вихри, вторичные вихри и т.д.). По этой причине генерационный и перераспределительный члены на функцию f_0 умножать не надо.

Во вторых. Пристенное воздействие на генерационные процессы зависит от расстояния до стенки, что учитывается функцией φ. Удовлетворительной аппроксимацией для нее служит выражение $\varphi = 1 - f_0$.

В третьих. Как и в случае уравнений переноса $\overline{u_i u_i}$ для учета пристенных вязких воздействий умножаем диффузионные члены на f_0.

Собирая все аппроксимации вместе и приводя подобные, получаем:

$$\frac{D\overline{u_{0i}u_{0j}}}{Dt} = f_0\left(\nu\frac{\partial^2\overline{u_{0i}u_{0j}}}{\partial x_k \partial x_k} + Diff_{turb}\left(\overline{u_{0i}u_{0j}}\right)\right) + f_0 P_{ij} - C_a\frac{\varepsilon_0}{k_0}\overline{u_{0i}u_{0j}}\,. \tag{12}$$

Турбулентная диффузия задается выражением (9).

Итоговая модель переноса турбулентных напряжений

Модель дополняется уравнениями переноса k_0 и ε_0. В итоге модель для расчета турбулентных напряжений имеет вид:

$$\frac{Dk_0}{Dt} = f_0\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu + D_k\right)\frac{\partial k_0}{\partial x_k} + f_0 P - \varepsilon_0, \tag{13}$$

$$\frac{D\varepsilon_0}{Dt} = f_0\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu + \frac{D_k}{C_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_k} + \frac{\varepsilon_0}{k_0}\left(C_1 f_0 P - C_2\varepsilon_0\right), \tag{14}$$

$$\frac{D\overline{u_{i0}^2}}{Dt} = f_0\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu + D_k\right)\frac{\partial\overline{u_{i0}^2}}{\partial x_k} + f_0\left(P_{ii} - C_a\frac{\varepsilon_0}{k_0}\left(\overline{u_{i0}^2} - \frac{2}{3}k_0\right)\right) - \varepsilon_{ui0}, \tag{15}$$

$$\frac{D\varepsilon_{ui0}}{Dt} = f_0\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu + \frac{D_k}{C_\varepsilon}\right)\frac{\partial\varepsilon_{ui0}}{\partial x_k} + + \frac{\varepsilon_0}{k_0}\left(C_1 f_0\left(P_{ii} - C_a\frac{\varepsilon_0}{k_0}\left(\overline{u_{i0}^2} - \frac{2}{3}k_0\right)\right) - C_2\varepsilon_{ui0}\right), \tag{16}$$

$$\frac{D\overline{u_{i0}u_{j0}}}{Dt} = f_0\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu + D_k\right)\frac{\partial\overline{u_{i0}u_{j0}}}{\partial x_k} + f_0 P_{ij} - C_a\frac{\varepsilon_0}{k_0}\overline{u_{i0}u_{j0}}, \tag{17}$$

$$P_{ij} \equiv -\overline{u_{0i}u_{0k}}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_{0j}u_{0k}}\frac{\partial U_i}{\partial x_k},\ D_k = C_{Diff} f_0\frac{k_0}{\varepsilon_0}\overline{u_{0k}^2},\ P = 0.5\sum P_{ii}$$

Значения констант: $C_2 = 1.45, C_1 = 0.98C_2, C_a = 2.8, C_{Diff} = 0.26, C_\varepsilon = 1.3.$

Здесь D_k – коэффициент турбулентной диффузии в направлении x_k. Отметим, что уравнения переноса выписаны без учета воздействия массовых сил на турбулентность.

Дальнейшая конкретизация модели, зависит от физики процесса, формы записи уравнений переноса (параболическая или эллиптическая) и т.д. Форму записи функции f_0 выбираем в зависимости от геометрии расчетной области.

Приведем несколько конкретных примеров.

Решается задача конвекции у нагретой вертикальной плоскости, т.е. в течении присутствует единственная стенка. Уравнения записываются в параболической форме. Считается, что ось координат x_2 направлена перпендикулярно плоскости.

В этом случае рассчитываются турбулентные напряжения $\overline{u_0^2}$, $\overline{v_0^2}$ и $\overline{u_0 v_0}$.

Функция f_0 имеет вид:

$$f_0 = \left(1-\exp\left(-\frac{\mathrm{Re}_{y0}}{5.5}\right)\right)\left(1-\exp\left(-2.4\frac{x_2}{L_{\varepsilon 0}}\right)\right),\ \mathrm{Re}_{y0} = \frac{\sqrt{k_0}x_2}{\nu},\ \ L_{\varepsilon 0} = \frac{k_0^{3/2}}{\varepsilon_0}.$$

Диффузией в продольном направлении пренебрегаем. Коэффициент турбулентной диффузии в поперечном направлении вычисляется как $D_2 = C_{Diff} f_0 \dfrac{k_0}{\varepsilon_0}\overline{v_0^2}$

Генерационные члены находятся согласно выражениям:

$$P_k = -\overline{u_0 v_0}\frac{\partial U}{\partial y} + \beta g \overline{u_0 t_0},\quad P_{uv} = -\overline{v_0^2}\frac{\partial U}{\partial y},\ P_u = -2\overline{u_0 v_0}\frac{\partial U}{\partial y},\ \ P_v = 0.$$

Еще пример. Рассчитывается двумерная задача вынужденной конвекции в замкнутой прямоугольной полости размерами $[0, H_x]\times[0, H_y]$, т.е. течение ограничено четырьмя стенками. Уравнения записываются в эллиптической постановке. Считаем, что U – скорость в направлении x, V – скорость в направлении y.

Из постановки задачи следует, что рассчитываются турбулентные напряжения $\overline{u_0^2}$, $\overline{v_0^2}$ и $\overline{u_0 v_0}$.

Функция f_0 учитывает наличие четырех стенок и имеет вид:

$$f_0 = \left(1-\exp\left(-\frac{\mathrm{Re}_{1x0}}{5.5}\right)\right)\left(1-\exp\left(-2.4\frac{x}{L_{\varepsilon 0}}\right)\right)\left(1-\exp\left(-\frac{\mathrm{Re}_{2x0}}{5.5}\right)\right)\left(1-\exp\left(-2.4\frac{H_x - x}{L_{\varepsilon 0}}\right)\right)\times$$
$$\times\left(1-\exp\left(-\frac{\mathrm{Re}_{1y0}}{5.5}\right)\right)\left(1-\exp\left(-2.4\frac{y}{L_{\varepsilon 0}}\right)\right)\left(1-\exp\left(-\frac{\mathrm{Re}_{2y0}}{5.5}\right)\right)\left(1-\exp\left(-2.4\frac{H_y - y}{L_{\varepsilon 0}}\right)\right),$$
$$\mathrm{Re}_{1x0} = \frac{\sqrt{k_0}x}{\nu}, \mathrm{Re}_{2x0} = \frac{\sqrt{k_0}(H_x - x)}{\nu},\ \mathrm{Re}_{1y0} = \frac{\sqrt{k_0}y}{\nu}, \mathrm{Re}_{2y0} = \frac{\sqrt{k_0}(H_y - y)}{\nu},\ L_{\varepsilon 0} = \frac{k_0^{3/2}}{\varepsilon_0}.$$

Коэффициент турбулентной диффузии в X направлении вычисляется как

$$D_1 = C_{Diff} f_0 \frac{k_0}{\varepsilon_0}\overline{u_0^2},$$

в Y направлении:

$$D_2 = C_{Diff} f_0 \frac{k_0}{\varepsilon_0} \overline{v_0^2} .$$

Генерационные члены находятся согласно выражениям:

$$P_k \equiv -\overline{u_0^2} \frac{\partial U}{\partial x} - \overline{u_0 v_0} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \overline{v_0^2} \frac{\partial V}{\partial y} , \; P_{uv} \equiv -\overline{u_0^2} \frac{\partial V}{\partial x} - \overline{v_0^2} \frac{\partial U}{\partial y} ,$$

$$P_u \equiv -2\overline{u_0^2} \frac{\partial U}{\partial x} - 2\overline{u_0 v_0} \frac{\partial U}{\partial y} , \; P_v \equiv -2\overline{u_0 v_0} \frac{\partial V}{\partial x} - 2\overline{v_0^2} \frac{\partial V}{\partial y} .$$

Выводы

В работе предложены модели для расчета турбулентных напряжений турбулентных тепловых потоков. Расчеты с использованием этих моделей продемонстрировали удовлетворительное соответствие с экспериментальными и расчетными данными разных авторов. Но в то же время необходимо добавить следующее. Как показывают расчеты, модели $k-\varepsilon$ типа, как правило, достаточно быстро выходят на правильное решение. Результаты расчетов весьма слабо зависят от начальных условий. В то же время описанная модель очень чувствительна по отношению к начальным условиям расчета. При незначительных погрешностях в начальных условиях расчеты по данной модели могут стабилизироваться в месте, резко отличающемся от верного решения. Здесь погрешности нужно понимать как отличие начальных условий от предполагаемых результатов расчетов по данной модели, а не отличие от экспериментальных данных. По этой причине к результатам расчетов по этой модели новых, плохо исследованных процессов нужно относиться с осторожностью.

В то же время необходимо отметить следующий факт. В литературе неоднократно отмечались большие сложности, возникающие при численном решении дифференциальных уравнений моделей турбулентности даже $k-\varepsilon$ типа (см. например Кастро [8]), т.е. систем, содержащих всего четыре дифференциальных уравнения, а именно – уравнение переноса импульса, уравнение неразрывности и два уравнения модели. Вышеописанная модель требует решения системы из 9 нелинейных дифференциальных уравнений, а именно – уравнения переноса импульса, уравнения переноса тепловой энергии, уравнения неразрывности, по два уравнения для описания переноса k, $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, а также уравнение для описания переноса $\overline{uv}$. Разнообразные проблемы, возникающие в процессе решения, просто огромны.

Литература

1. Golovnya B.P. Modelling of the fluctuating component in the form of the sum of an infnite number of random quantities// Int.J. of Heat and Mass Transf. - V 52 - 2009 - pp.5218-5228
2. Golovnya B.P. Modelling of the fluctuating component in the form of the sum of an infnite number of random quantities. Part 2. Model of transfer of turbulent stresses and turbulent heat fluxes// Int.J. of Heat and Mass Transf. - V. 52 – 2009 - pp. 5229-5240
3. Головня Б.П. Некоторые систематические ошибки в моделях пристенной турбулентности. Тезисы XIII международной научно-технической конференции «Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования» 24-29 сентября 2012 г., г. Харьков, Украина
4. Ротта И.К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости.-Л.:-Судостроение-1967.
5. *Hanjalic K., Launder B.E.* Contribution towards a Reynolds-stress closure for a low-Reynolds-number turbulence. // J. of Fluid Mech. - 1976. - V.74. - P.593-610.

6. *Rodi W.* On the equation governing the rate of turbulent energy dissipation.// Imperial College, Mech.Eng.Rep. TWF/TN/A/14. - 1971.
7. *Daly B.J., Harlow F.H.* Transport equations of turbulence // Phys. Fluids – 1970 – V.13 – P.26-34.
8. *Кастро И. П.* Трудности при численном расчете сложных турбулентных течений. // В кн.: Турбулентные сдвиговые течения 1. М.: Машиностроение – 1982 - С.227-246.

Стаття надійшла _16_._09_._2014___

Прийнято до друку _07_._10_._2014___

Анотація

Б.П. Головня
Модель переносу турбулентних напруг

Автором була запропонована модель турбулентності, що заснована на концепції турбулентної в'язкості, яка коректно відтворює каскадний процес. Обчислювальні експерименти показали, що її можливості обмежені. У даній роботі пропонується модель переносу турбулентних напруг.

Ключові слова: *моделювання турбулентності, RANS моделі, моделі переносу турбулентних напруг..*

Summary

B.P.Golovnya
Model of turbulent stresses transfer

The new model of turbulence was offered by author in previous works. This model bases on turbulent viscosity conception and correctly reproduces cascade transfer process. Calculations show that possibilities of this model are restricted. In given work model of turbulent stresses transfer is offered.

Key words: *turbulence modeling, RANS models, transport turbulent stress.*

УДК 004.94 **Н. А. Красношлык, А. О. Богатырёв**

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ПРОВЕДЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данной работе предложена схема проведения компьютерного моделирования. Приведено описание всех этапов и дана их характеристика. Взаимосвязь основных этапов проведения компьютерного моделирования иллюстрируется на примере гравитационной задачи N-тел.

Ключевые слова: *компьютерное моделирование, математическая модель, задача N-тел.*

Введение

Под математическим моделированием понимают процесс создания и дальнейшего использования математических моделей реальных объектов, процессов или явлений в различных областях науки и техники. Математическое моделирование является научным методом познания, цель которого заключается в объяснении, прогнозировании, изучении свойств и характеристик предмета моделирования путём исследования его математической модели [13]. В настоящее время для исследования математических моделей широко используют вычислительную технику. Для этого на основе рассматриваемой математической модели необходимо создать компьютерную модель, которая представляет собой компьютерную программу, описывающую поведение элементов исследуемой системы в процессе ее функционирования, учитывая их взаимодействие между собой и внешней средой. Процесс создания компьютерной модели является не мене важным, чем создание самой математической модели, и может оказаться достаточно трудоёмким, длительным и кропотливым.

В целом, компьютерное моделирование, как процесс создания и численного исследования предполагает выполнение исследователем ряда взаимосвязанных этапов, от качества реализации которых будет зависеть достоверность полученных результатов моделирования.

Целью данной работы является выделение и формализация основных этапов проведения численного компьютерного моделирования [9] реальных объектов, процессов или явлений, а также их иллюстрация на примере гравитационной задачи N-тел.

Основные этапы проведения компьютерного моделирования

Компьютерное моделирование становится главным инструментом современных исследователей при построении сложных математических моделей, позволяя эффективно применять существующий арсенал численных методов и современного программного обеспечения с использованием высокопроизводительных компьютеров.

Суть компьютерного моделирования состоит в получении количественных и качественных результатов по имеющейся модели. Качественные характеристики, получаемые в результате моделирования, позволяют обнаружить неизвестные ранее свойства объекта моделирования: его структуру, динамику развития, устойчивость и

др. Количественные характеристики используют для прогноза новых или объяснения существующих свойств данного объекта [10].

Основой процесса моделирования при самом общем подходе является предложенная А. А. Самарским формальная схема модель – алгоритм – программа [14], которая предполагает дальнейшую детализацию.

Процесс построения математической модели и её компьютерной реализации, как правило, состоит из нескольких самостоятельных этапов. Наиболее детально ключевые этапы построения математической модели рассмотрены в работе [6]. Описание отдельных этапов приводится в работах [7, 8, 11–13, 16]. При этом в работе [16] отмечается, что на сегодняшний день термины математическое моделирование и компьютерное моделирование являются почти синонимами.

На основе анализа рассмотренных работ предложена детализированная схема проведения компьютерного моделирования, представленная на рис. 1.

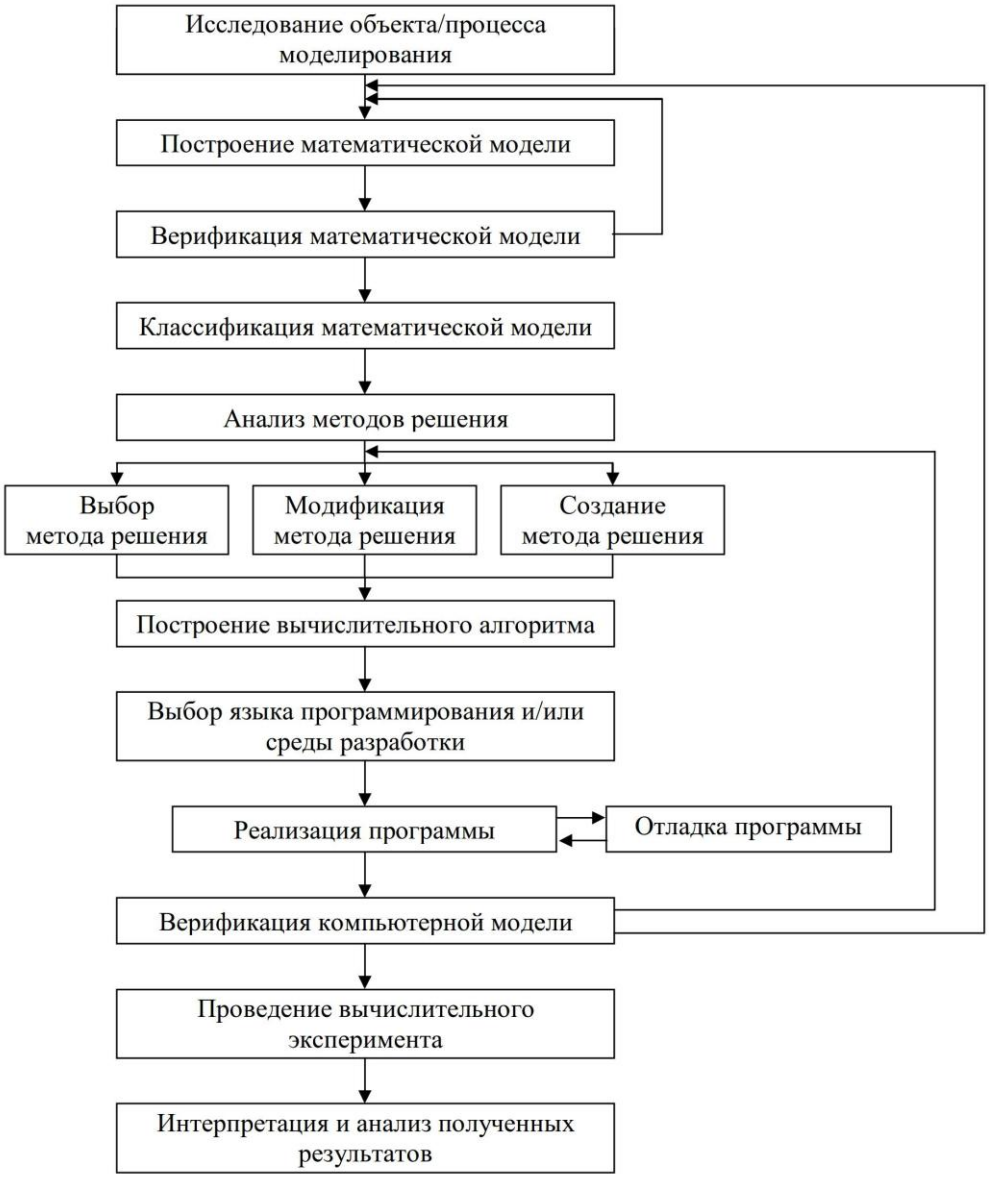


Рис. 1. Этапы проведения компьютерного моделирования

В соответствии с предлагаемой схемой, для проведения компьютерного моделирования некоторого объекта или процесса необходимо выполнить следующие этапы.

1. *Исследование объекта/процесса моделирования.* Данный этап предполагает сбор информации об объекте или процессе моделирования для составления содержательной постановки задачи моделирования.

2. *Построение математической модели*. На данном этапе необходимо получить математическую (абстрактную) модель реального объекта в виде алгебраических, дифференциальных и других уравнений.

3. *Классификация математической модели*. Данный этап служит для формальной классификации полученной математической модели.

4. *Верификация математической модели*. На данном этапе осуществляется проверка адекватности математической модели, которая предполагает: проведение контроля размерностей величин, входящих в уравнения модели; проверку математической замкнутости; рассмотрение случаев, когда параметры модели приближаются к предельно допустимым для них значениям.

5. *Анализ методов решения.* На этом этапе следует выполнить сравнительный анализ существующих методов решения задач данного класса. На основе выбранных критериев необходимо: либо определить наиболее подходящий из рассмотренных методов, либо модифицировать существующий метод, либо разработать новый метод численного решения данной задачи.

6. *Построение вычислительного алгоритма.* На данном этапе для построения вычислительного алгоритма, реализующего предложенный метод решения, необходимо выполнить дискретизацию математической модели.

Выполнять вычисления на компьютере с очень большими или же очень маленькими числами крайне не целесообразно. Поэтому, когда величины в математической модели отличаются от 1 на несколько порядков, предварительно следует перейти к безразмерным переменным.

7. *Выбор языка программирования и/или среды разработки.* На данном этапе в соответствии с целью создания и дальнейшего использования программного продукта, а также в зависимости от умений и возможностей разработчика, осуществляется выбор языка и среды программирования для реализации программы.

8. *Реализация программы.* На данном этапе необходимо осуществить программную реализацию вычислительного алгоритма и выполнить отладку программы.

9. *Верификация компьютерной модели.* На данном этапе проводится сопоставление получаемых результатов с аналитическим решением и/или экспериментальными данными.

10. *Проведение вычислительного эксперимента.* Данный этап предполагает получение новых численных данных об объекте/процессе моделирования на основе его компьютерной модели.

11. *Интерпретация и анализ полученных результатов*. Целью данного этапа является обработка, анализ и интерпретация полученных численных данных для реального объекта или процесса моделирования.

Компьютерное моделирование процесса взаимодействия *N*-тел

Рассмотрим гравитационную задачу *N*-тел, которая относится к фундаментальным задачам небесной механики. Данная задача была сформулирована

И. Ньютоном в 1867 году, однако, и в настоящее время не имеет точного решения в общем случае, хотя имеются частные аналитические решения при N=2 и N=3.

Актуальность задачи N-тел обусловлена как её применением в астрофизике для описания движения космических тел, так и её ролью для исследования траекторий движения частиц различных систем в молекулярной динамике, жидкостной динамике, электростатике, что вызывает интерес со стороны многих исследователей. Поэтому классическая задача N-тел была выбрана в качестве примера для иллюстрации и пояснения конкретных этапов компьютерного моделирования. С математическим описанием задачи N-тел можно ознакомиться, например, в [2, 5].

Следуя предлагающейся схеме (рис. 1), для компьютерного моделирования процесса гравитационного взаимодействия многих тел необходимо выполнить следующие этапы.

1. *Исследование объекта/процесса моделирования.* На данном этапе требуется изучить особенности взаимодействия тел, фундаментальные физические законы и принципы, которыми следует руководствоваться при построении модели.

Таким образом, *содержательная постановка рассматриваемой задачи* будет следующей. Имеется N тел, попарное взаимодействие которых подчинено закону всемирного тяготения Ньютона. Силы гравитации аддитивны. Заданы начальные положения и скорости тел. Требуется найти положения тел для всех последующих моментов времени.

2. *Построение математической модели.* На данном этапе требуется получить математическую модель гравитационной задачи N-тел.

Пусть в пространстве находятся N гравитирующих тел (материальных точек), которые попарно взаимодействуют между собой. В начальный момент времени для каждой i-ой ($i=\overline{1,N}$) точки известны её масса m_i (кг), положение в пространстве, определяемое радиус-вектором r_i (м) и скорость движения v_i (м·с$^{-1}$).

Согласно закону всемирного тяготения, две материальные точки притягиваются к друг другу с силой:

$$F_{ij} = G\frac{m_i \cdot m_j}{R^2},$$

где F_{ij} – сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками (Н), $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11}$ – универсальная гравитационная постоянная (м^3·кг$^{-1}$·с$^{-2}$), R – расстояние между точками (м).

Результирующая сила F, действующая на i-ю точку, является суммой сил F_{ij} попарных взаимодействий данной точки со всеми остальными:

$$F = \sum_{j=1}^{N} F_{ij}, \quad j \neq i,$$

$$F_{ij} = G \cdot m_i \cdot m_j \frac{r_j - r_i}{\left|r_j - r_i\right|^3}.$$

Ускорение движения i-ой точки $a_i = \dfrac{dv_i}{dt}$ (м·с$^{-2}$), можно найти из второго закона Ньютона:

$$a = \frac{F}{m}.$$

В результате получаем:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{F}{m_i} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} Gm_j \frac{r_j - r_i}{\left|r_j - r_i\right|^3}.$$

Таким образом, *математическая модель рассматриваемой задачи* может быть сформулирована следующим образом. Динамика взаимодействия N материальных точек описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} Gm_j \frac{r_j - r_i}{\left|r_j - r_i\right|^3}, \tag{1}$$

$$\frac{dr_i}{dt} = v_i, \tag{2}$$

при начальных условиях

$$r_i(0) = r_i^0 \ , \ v_i(0) = v_i^0, \tag{3}$$

где r_i^0 – значение, определяющее начальное положение i-ой точки в пространстве, v_i^0 – значение, определяющее начальную скорость этой материальной точки.

3. Классификация математической модели. С математической точки зрения рассматриваемая задача N-тел представляет собой задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Верификация математической модели. На данном этапе проведём верификацию полученной математической модели.

Вначале выполним контроль размерностей уравнений модели:

$$\frac{dr_i}{dt} = v_i \ \Rightarrow \ \frac{[\text{м}]}{[\text{с}]} = \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right].$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j\neq i}^{N} Gm_j \frac{r_j - r_i}{\left|r_j - r_i\right|^3} \ \Rightarrow \ \frac{\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]}{[\text{с}]} = \left[\frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}\right]\cdot[\text{кг}]\cdot\frac{[\text{м}]}{[\text{м}^3]} \ \Rightarrow \ \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right] = \frac{[\text{м}]}{[\text{с}^2]}.$$

Математическая модель является замкнутой, поскольку необходимо найти зависимости векторных величин $r_i(t)$ и $v_i(t)$, решив систему $2\cdot N\cdot d$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь d – размерность пространства.

5. Анализ методов решения. На этом этапе требуется выбрать метод для решения задачи N-тел.

Рассматриваемая задача не имеет аналитического решения в общем случае, поэтому для её решения необходимо использовать численные методы. Существуют различные методы численного решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений. Это приводит к необходимости выбора метода, наиболее подходящего для данной задачи. Критериями выбора конкретного численного метода для решения задачи N-тел выступают точность, эффективность, т.е. количество операций, необходимых для достижения заданной точности, и устойчивость метода. При выборе

численного метода также следует учитывать уровень квалификации, осведомлённость и практический опыт самого разработчика компьютерной модели. Учитывая разнообразие методов вычислительной математики, которые к тому же постоянно пополняются, использование неизвестных или очень сложных для разработчика методов может оказаться неоправданно трудозатратным. Поэтому, изначально следует рассмотреть наиболее распространённые, известные разработчику численные методы, а уже при необходимости либо искать альтернативные методы, либо модифицировать рассмотренные методы с учётом особенностей задачи, либо (в особо сложных случаях) разработать свой метод решения.

В качестве тестового примера для выбора численного метода решения задачи (1)–(3) рассмотрим упрощённую модель движения тел в одномерном пространстве:

$$\frac{dv_i}{dt} = a_i, \tag{4}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i. \tag{5}$$

Численное решение задачи (4)–(5) заключается в вычислении новых значений $v_i^{(k+1)}$ и $x_i^{(k+1)}$ на $k+1$ шаге по времени.

В простейшем случае данную задачу можно решить методом Эйлера. Расчётные формулы метода Эйлера для вычисления ускорений и положения тел через промежуток времени Δt будут иметь вид:

$$v_i^{(k+1)} = v_i^{(k)} + a_i^{(k)} \cdot \Delta t,$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + v_i^{(k)} \cdot \Delta t.$$

Метод Эйлера является методом первого порядка, его точность и устойчивость при решении (4)–(5) ограничены, поэтому следует рассмотреть и его возможные модификации.

Одно из усовершенствований метода Эйлера заключается в том, что при вычислении нового положения тела $x_i^{(k+1)}$ через промежуток времени Δt будет использоваться скорость в момент времени $t + \Delta t$. Соответствующая модификация определяет метод Эйлера-Кромера:

$$v_i^{(k+1)} = v_i^{(k)} + a_i^{(k)} \cdot \Delta t,$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + v_i^{(k+1)} \cdot \Delta t.$$

Ещё одна модификация метода Эйлера заключается в использовании усредненной скорости, в итоге получают метод второго порядка точности по координате и первого по скорости. Данный метод называют методом средней точки, расчётные формулы которого:

$$v_i^{(k+1)} = v_i^{(k)} + a_i^{(k)} \cdot \Delta t,$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{2}\left(v_i^{(k)} + v_i^{(k+1)}\right)\cdot \Delta t .$$

Для численного решения рассматриваемой задачи также используют алгоритм Верле, предназначенный для решения уравнений движения материальной точки. Данный метод имеет третий порядок точности для координаты и второй порядок для скорости. Расчётные формулы алгоритма Верле в скоростной формулировке имеют вид:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + v_i^{(k)} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_i^{(k)} \left(\Delta t\right)^2 , \tag{6}$$

$$v_i^{(k+1)} = v_i^{(k)} + \frac{1}{2}\left(a_i^{(k)} + a_i^{(k+1)}\right)\cdot \Delta t . \tag{7}$$

Одним из широко распространённых методов высших порядков для решения систем дифференциальных уравнений является метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Расчётные формулы метода Рунге-Кутты 4-го порядка для системы (4)–(5) имеют вид:

$$k1x_i = v_i^{(k)} \cdot \Delta t ,$$

$$k1v_i = a^{(k)}\left(x_i\right)\cdot \Delta t ,$$

$$k2x_i = \left(v_i^{(k)} + \frac{k1v_i}{2}\right)\cdot \Delta t ,$$

$$k2v_i = a^{(k)}\left(x_i^{(k)} + \frac{k1x_i}{2}\right)\cdot \Delta t ,$$

$$k3x_i = \left(v_i^{(k)} + \frac{k2v_i}{2}\right)\cdot \Delta t ,$$

$$k3v_i = a^{(k)}\left(x_i^{(k)} + \frac{k2x_i}{2}\right)\cdot \Delta t ,$$

$$k4x_i = \left(v_i^{(k)} + k3v_i\right)\cdot \Delta t ,$$

$$k4v_i = a^{(k)}\left(x_i + k3x_i\right)\cdot \Delta t ,$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{6}\left(k1x_i + 2\cdot k2x_i + 2\cdot k3x_i + k4x_i\right),$$

$$v_i^{(k+1)} = v_i^{(k)} + \frac{1}{6}\left(k1v_i + 2\cdot k2v_i + 2\cdot k3v_i + k4v_i\right).$$

Следует заметить, что здесь $a^{(k)}\left(x_i\right) \equiv a_i^{(k)}$.

Для выбора численного метода необходим сравнительный анализ решений, получаемых различными методами. Основными критериями при этом выступают точность и эффективность. Во всех рассмотренных методах погрешность вычисления координат тел накапливается по-разному. Наиболее точным является метод Рунге-Кутты. Однако в нём вычисление ускорений тел выполняется на каждом шаге по времени 4 раза, в то время как в остальных методах – 1 раз. Ещё одним важным критерием при моделировании движения тел является сохранение полной энергии системы на всём временн*о*м интервале. В целом, ни один из рассмотренных методов не превосходит существенно остальные по всем критериям. Выбирая компромиссный вариант с учётом точности метода, устойчивости получаемого решения и времени работы будем использовать скоростной метод Верле.

6. *Построение вычислительного алгоритма.* На данном этапе для построения вычислительного алгоритма решения задачи *N*-тел требуется перейти к безразмерной форме уравнений, поскольку физические параметры математической модели (1)–(3) имеют различные порядки.

В качестве величин для масштабирования в задаче *N*-тел выберем следующие параметры:

$$A = 1 \text{ а.е.} = 1.486\cdot 10^{11} \text{ м},\ T = 1 \text{ год} = 3.15\cdot 10^{7} \text{ с},\ M = 5.9726\cdot 10^{24} \text{ кг (масса Земли)}.$$

Введём безразмерные переменные

$$\bar{r} = \frac{r}{A},\ \bar{v} = \frac{v\cdot T}{A},\ \bar{t} = \frac{t}{T}$$

и параметры

$$\bar{G} = \frac{G\cdot M\cdot T}{A^3} = \frac{6.67\cdot 10^{-11}\left(\text{м}^3\cdot\text{кг}^{-1}\cdot\text{с}^{-2}\right)\cdot 5.9726\cdot 10^{24}\left(\text{кг}\right)\cdot 3.15\cdot 10^{17}\left(\text{с}^2\right)}{\left(1.486\cdot 10^{11}\left(\text{м}\right)\right)^3} \approx 1.21\cdot 10^{-4}$$

Из данных соотношений выразим размерные величины и подставим их в уравнения (1)–(3), которые описывают рассматриваемую математическую модель процесса взаимодействия *N*-тел. После преобразований, опустив черту над безразмерными величинами, вернемся к исходному виду математической модели.

Далее рассматриваем математическую модель (1)–(3) с безразмерными переменными в двумерном пространстве. Численное решение задачи *N*-тел заключается в вычислении пространственных координат всех тел через определённые промежутки времени.

Пусть заданы массы тел (m_i) и их координаты на плоскости $\left(x_i, y_i\right)$, $i = \overline{1, N}$. На рис. 2. представлены два тела, которые находятся на расстоянии r, где *i*-ое тело притягивается *j*-ым с силой F. Вектор силы в двухмерном пространстве определяется двумя компонентами F_x и F_y.

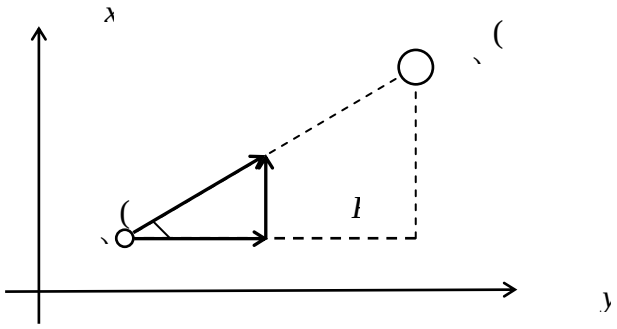


Рис. 2 Определение проекций вектора силы

Найдём проекции вектора F на оси координат:

$$F_x = F \cdot \cos\alpha = \frac{x_j - x_i}{r},$$

$$F_y = F \cdot \sin\alpha = \frac{y_j - y_i}{r},$$

где $r = \sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2}$.

Пусть a_{x_i}, a_{y_i}, v_{x_i}, v_{y_i} – проекции ускорения и скорости на оси.

Используя (1) найдём проекции вектора ускорения:

$$a_{x_i} = \frac{F_x}{m_i} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} Gm_j \frac{x_j - x_i}{r^3}, \quad a_{y_i} = \frac{F_y}{m_i} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} Gm_j \frac{y_j - y_i}{r^3}. \tag{8}$$

Алгоритм вычисления новых положений тел в соответствии с методом Верле состоит в следующем:

1. Провести инициализацию переменных:

- задать N – количество тел;

- задать массы тел m_i ($i = \overline{1, N}$);

- задать начальные положения тел $\left(x_i, y_i\right)$, проекции вектора скорости v_{x_i}, v_{y_i} ($i = \overline{1, N}$);

- задать шаг по времени Δt и время окончания вычислительного эксперимента t_{end};

2. Пока $t \le t_{end}$ выполнять:

для каждого i-го тела ($i = \overline{1, N}$) выполнять:

2.1 вычислить новые координаты тела:

$$x_i^{(new)} = x_i^{(old)} + v_{x_i}^{(old)} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_{x_i}^{(old)} \left(\Delta t\right)^2,$$

$$y_i^{(new)} = y_i^{(old)} + v_{y_i}^{(old)} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_{y_i}^{(old)} \left(\Delta t\right)^2;$$

2.2 вычислить проекции нового ускорения:

$$a_{x_i}^{(new)} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} Gm_j \frac{x_j^{(new)} - x_i^{(new)}}{r^3},$$

$$a_{y_i}^{(new)} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} Gm_j \frac{y_j^{(new)} - y_i^{(new)}}{r^3};$$

2.3 вычислить проекции скорости:

$$v_{x_i}^{(new)} = v_{x_i}^{(old)} + \frac{1}{2}\left(a_{x_i}^{(old)} + a_{x_i}^{(new)}\right)\cdot \Delta t\,,$$

$$v_{y_i}^{(new)} = v_{y_i}^{(old)} + \frac{1}{2}\left(a_{y_i}^{(old)} + a_{y_i}^{(new)}\right)\cdot \Delta t\,.$$

7. Выбор языка программирования и/или среды разработки. Целью создания компьютерной модели процесса гравитационного взаимодействия *N*-тел в пространстве является численное исследование и графическая визуализация динамики данной системы.

Для программной реализации модели выбран язык программирования *C*, графическая библиотека OpenGL и среда разработки Microsoft Visual Studio 2010.

8. Реализация программы. На данном этапе выполняется программная реализация вычислительного алгоритма.

В табл. 1 приведены соответствия имен программных и математических переменных для рассматриваемой задачи.

Таблица 1.

Входные данные:		
`N`	N	количество тел
`m[i]`	m_i	одномерный массив, содержащий массы тел
`x[i]`	x_i	одномерные массивы, содержащие координаты тел
`y[i]`	y_i	
`vx[i]`	v_{x_i}	одномерные массивы, содержащие проекции скоростей тел
`vy[i]`	v_{y_i}	
`ax[i]`	a_{x_i}	одномерные массивы, содержащие проекции ускорений тел
`ay[i]`	a_{y_i}	
`T`	t	текущее время
`t_end`	t_{end}	время окончания
`Dt`	Δt	шаг по времени

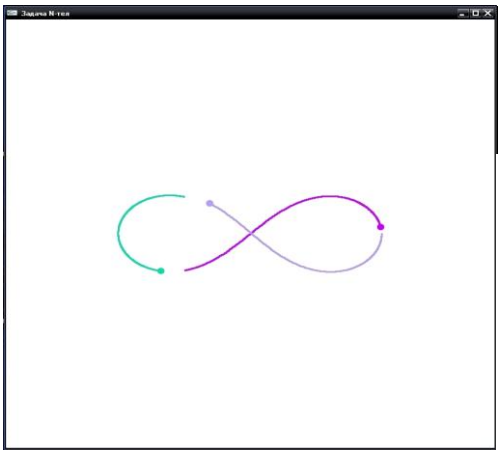
Продолжение Табл. 1

Выходные данные:		
`x[i]`	x_i	одномерные массивы, содержащие текущие координаты тел
`y[i]`	y_i	
Промежуточные переменные		
`Dx`	$x_i - x_j$	
`Dy`	$y_i - y_j$	
`R`	$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$	
`E`		полная энергия системы
Используемые функции		
`void init(void)`		инициализация переменных
`void calc(void)`		вычисление текущих координат тел
`double calc_energy(void)`		вычисление полной энергии системы

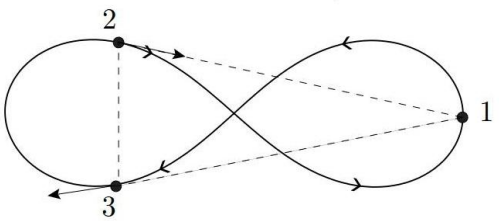
9. *Верификация компьютерной модели.* Для верификации компьютерной реализации рассматриваемой математической модели можно взять задачу трёх тел, поскольку для этого случая существуют аналитические решения для некоторых частных случаев.

В качестве тестового примера рассмотрим случай, впервые описанный в 1999 г. К. Муром [4], когда три тела одинаковой массы движутся друг за другом вдоль плоской кривой в форме восьмёрки.

Проведено сравнение результатов компьютерного моделирования движения трёх тел на основе реализованной компьютерной модели с имеющимися результатами других авторов [1]. Сопоставляя рис. 3а и рис. 3б можно сделать вывод о качественном соответствии приведенных результатов моделирования. Также выполнено сравнение изменяющихся значений координат тел в процессе моделирования. Результаты сравнения свидетельствуют об адекватности компьютерной реализации модели гравитационного взаимодействия N тел, а также о возможности её применения для исследования динамики данной системы.



а)



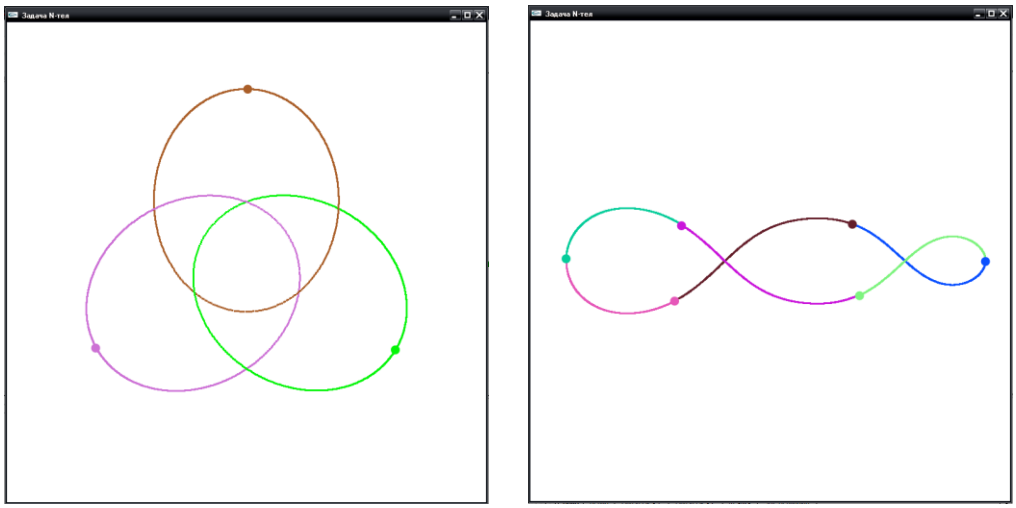
б)

Рис. 3 Иллюстрация движения трёх тел по орбите в форме восьмёрки
а) результаты компьютерного моделирования, б) результаты из [1]

10. Проведение вычислительного эксперимента. Реализованная компьютерная модель позволяет исследовать динамику взаимодействия *N*-тел в двумерном пространстве.

Решение задачи *N*-тел, при котором все тела движутся вдоль одной и той же плоской кривой без столкновений с постоянными сдвигами фаз, называют простой хореографией [15]. Данный термин ввёл К. Симо ввиду того, что при анимации тела совершают танцеподобные движения.

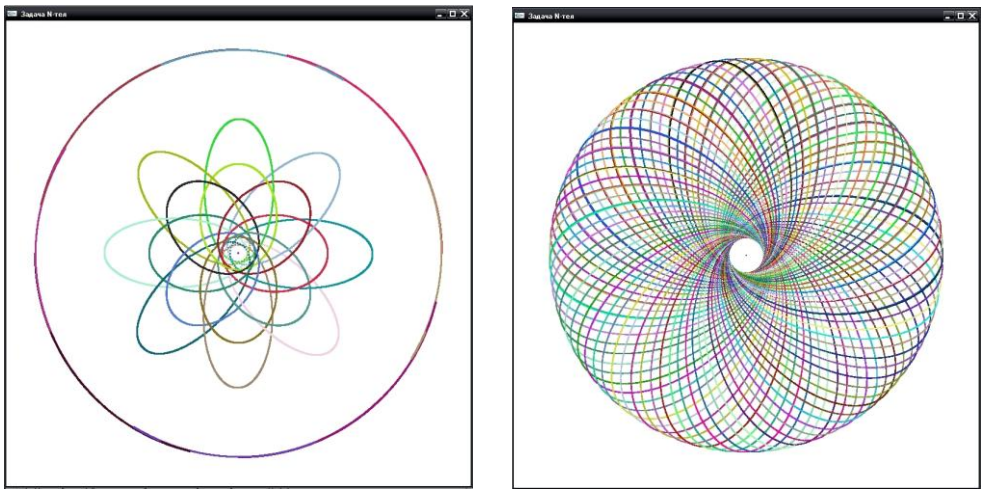
Проведена серия вычислительных экспериментов, демонстрирующая простые хореографии с различным количеством тел.



а) б)

Рис. 3 Иллюстрация простых хореографий при а) N =3, б) N =6

Выполнено компьютерное моделирование гравитационного взаимодействия различных ансамблей тел, результаты которого приведены на рис. 5.



а) б)

Рис. 5 Иллюстрация траекторий движения тел
при а) N =25, б) N=101

На рис. 6 представлены результаты компьютерного моделирования динамики формирования спиралевидной галактики при N =1000.

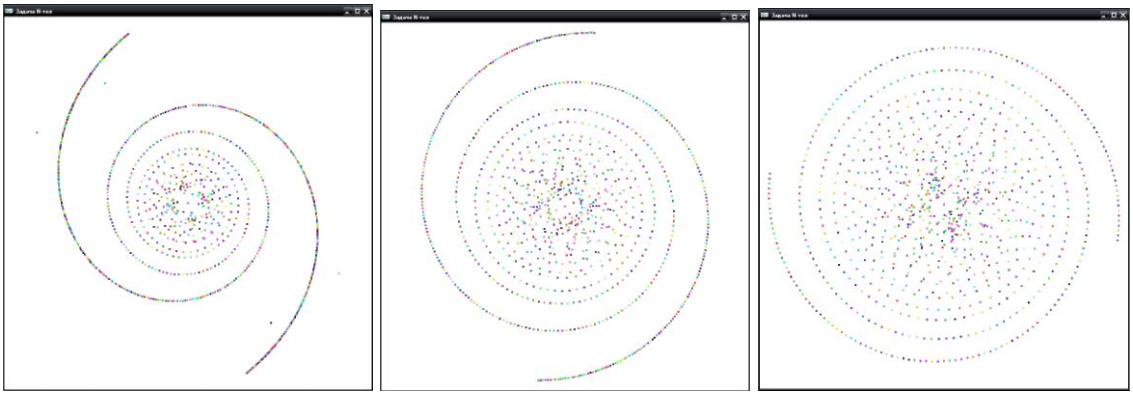


Рис. 6 Эволюция спиралевидной галактики при N =1000.

11. Интерпретация и анализ полученных результатов. В настоящее время найдены сотни хореографических решений, причём число «различных» хореографий быстро возрастает при увеличении N. Наибольшее число N, для которого найдена простая хореография, когда все тела движутся вдоль восьмёркообразной кривой, равно 799 [15]. Численные исследования, нацеленные на поиск различных хореографий для заданного N продолжаются. Авторами работы [3] предложена классификация существующих групп плоских симметричных хореографий N-тел.

В процессе исследования проведено компьютерное моделирование взаимодействия N-тел при N=1000. Следует отметить, что при увеличении числа тел, количество взаимодействий между ними, которое необходимо учитывать в формуле (8), растёт как $O\left(N^2\right)$. При больших значениях N для повышения эффективности результирующего алгоритма с точки зрения быстродействия при вычислении (8) целесообразно использовать либо параллельные вычисления, либо алгоритм Барнса-Хата.

Выводы

Компьютерное моделирование является одним из эффективных методов изучения объектов, процессов или явлений различной природы. Процесс компьютерного моделирования можно условно разделить на несколько взаимосвязанных этапов.

В работе предложена общая схема проведения численного компьютерного моделирования, которая содержит ключевые этапы и отображает связи между ними. Приведено как общее описание всех этапов моделирования, так и конкретизированное описание каждого из них на примере задачи взаимодействия N-тел. Представленная схема раскрывает основную суть процесса компьютерного моделирования и может применяться для повышения его эффективности.

Литература

1. Chenciner A. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses / Alain Chenciner, Richard Montgomery // Annals of Mathematics. – 2000. – №152. – P. 881-901.
2. Gould H. An Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical Systems / H. Gould, J. Tobochnik, W. Christian. – [3-rd ed.]. – Addison-Wesley, 2006. – 796 p.
3. Montaldi J. Classification of symmetry groups for planar n-body choreographies [Электронный ресурс] / James Montaldi, Katrina Steckles // arXiv.org : [сайт]. – Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1305.0470.
4. Moore C. Braids in classical dynamics / Cristopher Moore // Phys. Rev. Lett.. – 1993. – Vol.70. – P. 3675-3679.
5. Бутиков Е. И. Движения космических тел в компьютерных моделях. II Задача многих тел / Е. И. Бутиков // Компьютерные инструменты в образовании. – 2001. – № 5. – С. 4-23.

6. Введение в математическое моделирование : учеб. пособие / [В. Н. Ашихмин и др.] ; под ред. П. В. Трусова. – М.: Университетская книга, Логос, 2007. – 440 с.
7. Колесов Ю. Б. Моделирование систем. Динамические и гибридные системы : учеб. пособие / Ю. Б. Колесов, Ю. Б. Сениченков. – СПб: БХВ-Петербург, 2012. – 224 с.
8. Лазарєв Ю. Ф. Моделювання на ЕОМ : навчальний посібник / Ю. Ф. Лазарєв. – К.: Політехніка, 2007. – 2009 с.
9. Майер Р. В. Компьютерное моделирование : учебник для педвузов. – Глазов: ГГПИ, 2014. – 531 с.
10. Макарова Н. В. Информатика : учебник для вузов / Н. В. Макарова, В. Б. Волков. – СПб: Питер, 2011. – 576 с.
11. Маликов Р. Практикум по компьютерному моделированию физический явлений и объектов : учеб. пособие / Р. Ф. Маликов. – Уфа: Изд-во БашГПУ, 2005. – 291 с.
12. Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей / А. Д. Мышкис. – [3-е изд., испр.]. – М.: КомКнига, 2007. – 192 с.
13. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
14. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / Самарский А. А., Михайлов А. П. – [2-е изд., испр.]. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
15. Современные проблемы хаоса и нелинейности / [К. Симо и др.]. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 304 с.
16. Тарасевич Ю. Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс : учеб. пособие / Ю. Ю. Тарасевич. – [4-е изд., испр.]. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 152 с.

Стаття надійшла _24_._09_._2014___

Прийнято до друку _07_._10_._2014___

Анотація

Н. О. Красношлик, О. О. Богатирьов
Основні етапи проведення комп'ютерного моделювання

У даній роботі запропонована схема проведення комп'ютерного моделювання. Наведено опис всіх етапів і дана їх характеристика. Взаємозв'язок основних етапів проведення комп'ютерного моделювання ілюструється на прикладі гравітаційної задачі N-тіл. Для розглянутої задачі описано побудову математичної моделі, обґрунтовано вибір чисельного методу розв'язування, наведено відповідний обчислювальний алгоритм та представлено результати обчислювальних експериментів.

Ключові слова: *комп'ютерне моделювання, математична модель, задача N-тіл.*

Summary

N. A. Krasnoshlyk, A. O. Bogatyrev
Basic stages of computer simulation

In this paper we propose a scheme of computer simulation. A description of all the stages and their characteristic is given. The relationship of the main stages of computer simulation is illustrated by the gravitational N-body problem. For this problem the mathematical model building is described, the choice of a numerical method of solution is substantiated, appropriate computational algorithm is given and results of computational experiments are presented.

Key words: *computer simulation, mathematical model, N-body problem.*

УДК 519.8 **А. О. Емец**

ДОПУСКОВЫЕ РЕШЕНИЯ С РАЗНЫМ ТИПОМ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ДЛЯ НЕЧЕТКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

В статье приведены известные необходимые понятия из теории нечетких чисел и интервальных систем, а именно понятия: нечеткого числа, носителя и функции принадлежности нечеткого числа, дискретного и континуального нечеткого числа; интервальной матрицы; нижней и верхней границ интервальной матрицы; средней матрицы; матрицы радиусов; интервального вектора; нижней и верхней границ интервального вектора; среднего вектора; вектора радиусов.

В работе введены новые понятия, такие как: понятие однопикового нечеткого числа (дискретного и континуального); острого и не острого пика; нормального нечеткого числа; стандартного нечеткого числа; стандартизированного нечеткого числа.

В статье введено понятие нечеткой матрицы, которое связывает интервальный аппарат и аппарат нечетких чисел; введено понятия интервальной линейной системой уравнений; нечеткой линейной системой уравнений.

В работе введено понятие допускового с типом принадлежности $<t,\tau>$ *решения нечеткой линейной системы и дана его характеризация.*

Доказана лемма: если I_A^t *– интервальная матрица, представленная через верхнюю* $\overline{A}^t$ *и нижнюю* $\underline{A}^t$ *границы интервальной матрицы* $[\underline{A}^t, \overline{A}^t]$, *где* $\underline{A}^t, \overline{A}^t \in R^{m\times n}$, *а* x *допусковый вектор с типом принадлежности* $<t,\tau>$, $x \in R^n$, *тогда семейство с номером* t *правых частей систем линейных уравнений* $A^t x$ *можно представить через матрицу радиусов* Δ^t: $\{ A^t x \mid A^t \in I_A^t \} = [A_c^t x - \Delta^t |x|, A_c^t x + \Delta^t |x|]$.

Для семейства с номером t $A^t x$ *правых частей систем линейных уравнений доказано, что следующие утверждения эквивалентны:*

1) x *– допусковое с типом принадлежности* $<t,\tau>$ *решение нечеткой линейной системы вида* $F_A x = F_b$;

2) x *– удовлетворяет неравенству* $|A_c^t x - b_c^\tau| \le -\Delta^t |x| + \delta^\tau$, *где* A_c^t *– средняя матрица интервальной матрицы,* b_c^τ *– средний вектор интервального вектора,* Δ^t *– матрица радиусов интервальной матрицы,* δ^τ *– вектор радиусов интервального вектора,*

3) $x = x_1 - x_2$, *где* x_1, x_2 *удовлетворяют условиям:* $\overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \le \overline{b}^\tau$; $\underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 \ge \underline{b}^\tau$; $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$, *где* $\overline{A}^t, \underline{A}^t$ *– верхняя и нижняя границы интервальной матрицы;* $\overline{b}^\tau$, $\underline{b}^\tau$ *– верхняя и нижняя границы интервального вектора.*

Обосновано, что проверка того, что x *является допусковым с типом принадлежности* $<t,\tau>$ *решением нечеткой системы, может быть осуществима за полиномиальное время.*

Ключевые слова: *нечеткие линейные системы уравнений, нечеткие числа, интервальные системы, допусковые решения.*

Введение

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными или практическими задачами. Исследование систем уравнений, содержащих нечеткие данные [1, 2], весьма актуальная проблема, в частности в задачах оптимизации и принятия решений [3-11].

Анализ последних исследований и публикаций, в которых предложено решения данной проблемы и на которые опирается автор. В работе [12] начат анализ таких

систем с использованием аппарата интервальных систем [13].

Нерешенные прежде задачи общей проблемы, которым посвящается указанная статья. Формулирование целей статьи (постановка задачи). В данной работе вводится понятие допусковых решений таких систем разных типов и дается их характеризация.

Необходимые факты из теории нечетких чисел и интервальных систем

Нечетким числом называют множество пар:

$$A = \{a \mid \mu(a) \,\big|\, a \in [a_{\mathrm{L}}, a_{\mathrm{R}}] \subset \mathrm{R}^1,\ \mu \in [0,1]\}.$$

Носителем нечеткого числа A называют множество $\{a\}$ чисел $a \in R^1$ в множестве пар, образующих нечеткое число A. Функцией принадлежности называют функцию, ставящую в соответствие $\forall a$ число $\mu(\mathrm{a})$.

Нечеткое число называют дискретным, если мощность носителя $\{a\}$ конечна (синоним – нечеткое число с дискретным носителем). Нечеткое число называют континуальным, если носитель $\{a\}$ имеет мощность континуума (синоним нечеткое число с континуальным носителем). Точки а носителя нечеткого числа A называют пиковыми, если $\mu(\mathrm{a}) = 1$.

Пусть элементы носителя дискретного нечеткого числа A пронумерованы так, что $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

Дискретное число называют однопиковым, если набор подряд идущих чисел носителя $\alpha_L = a_{i+1}$, a_{i+2}, …, $a_{i+p} = \alpha_R$, для которых функция принадлежности равна единице, единственен. Точки a_{i+1}, a_{i+2}, …, a_{i+p} называют пиком числа A. Если $p = 1$, то такой пик называют острым, иначе – не острым.

Континуальное нечеткое число A называют однопиковым, если отрезок $[\alpha_L, \alpha_R] \subset (a_L, a_R)$, для всех чисел a которого $\mu(a) = 1$, единственный. Отрезок $[\alpha_L, \alpha_R]$ называют пиком числа A. Если $\alpha_L = \alpha_R$, то пик называют острым, иначе – не острым.

Нечеткое число называют нормальным, если функция принадлежности слева от первого (левого) пика не убывающая, а справа от последнего (правого) пика не возрастающая.

Нормальное однопиковое число называют стандартным. Оно может быть как дискретным, так и континуальным.

Стандартизированным нечетким числом называют дискретное нечеткое число вида:

$$A = \{\underline{a}_0 \mid 0;\quad \underline{a}_1 \mid 0{,}25;\quad \underline{a}_2 \mid 0{,}5;\quad \underline{a}_3 \mid 0{,}75;$$

$$\underline{a}_4 \mid 1;\quad \overline{a}_4 \mid 1;\quad \overline{a}_3 \mid 0{,}75;\ \overline{a}_2 \mid 0{,}5;\quad \overline{a}_1 \mid 0{,}25;\quad \overline{a}_0 \mid 0\},$$

где $\underline{a}_0 < \underline{a}_1 < \underline{a}_2 < \underline{a}_3 < \underline{a}_4 \le \overline{a}_4 < \overline{a}_3 < \overline{a}_2 < \overline{a}_1 < \overline{a}_0$. Число A удобно задавать упорядоченной десяткой $A = (\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \overline{a}_4, \overline{a}_3, \overline{a}_2, \overline{a}_1, \overline{a}_0)$. Если пик острый, то $\underline{a}_4 = \overline{a}_4$.

Из стандартного нечеткого континуального числа стандартизированное можно

получить дискретизацией носителя по значениям $0{,}25i$ функции принадлежности, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\} = J_4^0 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. При этом концы $\underline{a}_i$, $\overline{a}_i$ интервалов $[\underline{a}_i, \overline{a}_i]$ определяются условиями: $\forall a \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i]$ $\mu(a) \in [0{,}25i, 1]$, $\forall \varepsilon > 0$ $\mu(\underline{a}_i - \varepsilon) < 0{,}25i$; $\mu(\overline{a}_i + \varepsilon) < 0{,}25i$, $\underline{a}_0 = a_L$; $\overline{a}_0 = a_R$.

Получение стандартизированного нечеткого числа из стандартного дискретного осуществимо по алгоритмам из [14, 15].

Далее будем рассматривать только стандартизированные нечеткие числа, поэтому слово «стандартизированное» будем опускать.

Введем в соответствии с [13] необходимую терминологию интервальных матриц.

Пусть $\underline{A}$, $\overline{A}$ – две $m \times n$ матрицы с действительными элементами, т. е. $\underline{A}$, $\overline{A} \in R^{m \times n}$. При $n = 1$ такая матрица – это вектор-столбец. Пусть $\underline{A}$ поэлементно не больше $\overline{A}$, обозначим это $\underline{A} \le \overline{A}$.

Множество матриц A, удовлетворяющих условию $\underline{A} \le A \le \overline{A}$, называют интервальной матрицей. Обозначим ее I_A, т. е. $I_A = \{A \mid \underline{A} \le A \le \overline{A}\}$. Матрицу $\underline{A}$ называют нижней, а матрицу $\overline{A}$ – верхней границами интервальной матрицы I_A, которую также обозначают так: $I_A = [\underline{A}, \overline{A}]$. Матрицу $A_c = \frac{1}{2}(\underline{A} + \overline{A})$ называют средней матрицей для I_A, а матрицу $\Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$ называют матрицей радиусов для I_A. Очевидно, что элементы Δ_{ij} – матрицы радиусов неотрицательны: $\Delta_{ij} \ge 0$ $\forall i = \overline{1, m}$, $\forall j = \overline{1, n}$.

Согласно определений A_c и Δ имеем: $\underline{A} = A_c - \Delta$; $\overline{A} = A_c + \Delta$. Поэтому, I_A можно представить и так: $I_A = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$ или $I_A = \{A \mid |A - A_c| \le \Delta\}$, где модуль (абсолютная величина) $|B|$ матрицы $B = (b_{ij}) \in R^{m \times n}$ определяется как матрица $|B| = (|b_{ij}|) \in R^{m \times n}$.

Интервальным вектором-столбцом I_b называют интервальную матрицу с одним столбцом. Будем I_b с использованием $\overline{b}$ – верхней и $\underline{b}$ – нижней границ для I_b обозначать так: $I_b = \{b \mid \underline{b} \le b \le \overline{b}\}$, где $\underline{b}, \overline{b} \in R^m$. Вектор $b_c = \frac{1}{2}(\underline{b} + \overline{b})$ называют средним вектором интервального вектора I_b, а вектор $\delta = \frac{1}{2}(\overline{b} - \underline{b})$ – вектором радиусов для I_b. Таким образом, $I_b = [\underline{b}, \overline{b}] = [b_c - \delta; b_c + \delta]$.

Используя понятие интервальной матрицы, введем понятие нечеткой матрицы.

Определение 1. Нечеткой матрицей F_A назовем пятислойную таблицу (матрицу, массив), состоящую на каждом слое t, $t \in J_4^0$, из интервальных матриц $I_A^t = [\underline{A}^t, \overline{A}^t]$, где матрицы $\underline{A}^t = (\underline{a}_{ijt}) \in R^{m \times n}$, $\overline{A}^t = (\overline{a}_{ijt}) \in R^{m \times n}$, а числа $\overline{a}_{ijt}$, $\underline{a}_{ijt}$ – это элементы стандартизированного нечеткого числа $a_{ij} = (\underline{a}_{ij0}, \underline{a}_{ij1}, \underline{a}_{ij2}, \underline{a}_{ij3}, \underline{a}_{ij4}, \overline{a}_{ij4}, \overline{a}_{ij3}, \overline{a}_{ij2}, \overline{a}_{ij1}, \overline{a}_{ij0})$.

Число t будем называть номером слоя матрицы F_A, матрицу I_A^t – слоем t матрицы F_A, а нечеткую матрицу F_A обозначать (a_{ij}) или (a_{ijt}) $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$; $t \in J_4^0$.

Если $n = 1$, то нечеткую матрицу назовем нечетким вектором-столбцом с m

нечеткими координатами $b_i = (\underline{b}_{i0}, \underline{b}_{i1}, \underline{b}_{i2}, \underline{b}_{i3}, \underline{b}_{i4}, \overline{b}_{i4}, \overline{b}_{i3}, \overline{b}_{i2}, \overline{b}_{i1}, \overline{b}_{i0})$ и обозначим $F_b = (b_i)$ или $F_b = (b_{it})$ $i = \overline{1,m}$, $t \in J_4^0$.

Вектор $I_b^t = [\underline{b}^t, \overline{b}^t]$, где $\underline{b}^t = (\underline{b}_{1t}, \underline{b}_{2t}, ..., \underline{b}_{mt})$, $\overline{b}^t = (\overline{b}_{1t}, \overline{b}_{2t}, ..., \overline{b}_{mt})$, назовем t-ым слоем вектора F_b, а вектор F_b – пятислойным.

Интервальной линейной системой уравнений

$$I_A x = I_b \qquad (1)$$

называют семейство всех систем линейных уравнений

$$Ax = b, \qquad (2)$$

где

$$A \in I_A;\ b \in I_b. \qquad (3)$$

Определение 2. Нечеткой линейной системой уравнений

$$F_A x = F_b \qquad (4)$$

назовем совокупность пяти интервальных линейных систем уравнений

$$\left[\begin{array}{l} I_A^4 x = I_b^4; \\ I_A^3 x = I_b^3; \\ I_A^2 x = I_b^2; \\ I_A^1 x = I_b^1; \\ I_A^0 x = I_b^0; \end{array}\right. \qquad (5)$$

где F_A и I_A^t, F_b и I_b^t, $t \in J_4^0$ соотносятся между собой согласно определения 1, то есть I_A^t является слоем t матрицы F_A, а I_b^t есть слоем t вектора F_b.

Имеет место включения (см. теорему 1 из [12]): $I_A^t \subset I_A^{t-1}$, $I_b^t \subset I_b^{t-1}$ $\forall t \in \{0, 1, 2, 3\} = J_3^0$, где знак $\subset$ может означать и равенство.

Допусковые решения нечеткой линейной системы уравнений

Поставим в соответствие каждой интервальной линейной системе уравнений из (5) $I_A^t x = I_b^t$, $t \in J_4^0$, семейство с номером t систем линейных уравнений вида (2) с данными вида (3) соответственно:

$$A^t x = b^t; \qquad (6)$$

$$A^t \in I_A^t;\ b^t \in I_b^t. \qquad (7)$$

Определение 3. Назовем вектор $x \in R^n$ допусковым с типом принадлежности $< t, \tau >$ решением нечеткой линейной системы вида (4) $F_A x = F_b$, если для него выполняется условие:

$$A^t x = I_b^\tau \ \ \forall A^t \in I_A^t,\ t, \tau \in J_4^0. \qquad (8)$$

Название решения объясняется тем, что вектор $A^t x$, определяемый данными со значениями принадлежности не меньше $0{,}25t$, остается внутри интервала (интервала «допусков») I_b^τ, определяемого данными со значением функций принадлежности не меньше $0{,}25\tau$, независимо от выбора матрицы $A^t \in I_A^t$.

Определение 3 может быть представлено в виде: вектор x, называемый допусковым с типом принадлежности $< t, \tau >$ решением нечеткой системы (4), должен удовлетворять условию:

$$\{A^t x \mid A^t \in I_A^t\} \subset I_b^\tau . \tag{9}$$

Заметим, что определение 3 вводит в рассмотрение 25 допусковых решений, соответствующих разным значениям $t, \tau \in J_4^0$. В работе [12] числовым значениям t (τ) приписывается определенный смысл, который мы будем иметь в виду и в этой работе. Тип $t = 0$ $(\tau = 0)$ будем называть нечетким, $t = 1$ $(\tau = 1)$ будем называть квазинечетким, $t = 2$ $(\tau = 2)$ – полунечетким (синоним – получетким), $t = 3$ $(\tau = 3)$ тип назовем квазичетким, а при $t = 4$ $(\tau = 4)$ – четким. Такие названия определяются соответствующим значением функций принадлежности – не меньше $0{,}25t$ $(0{,}25\tau$ соответственно) – согласно определению стандартизированного нечеткого числа (см. табл. 1).

Таблица 1

Типы принадлежности допусковых решений

t \ τ	0	1	2	3	4
0	нечетко-нечеткий	нечетко-квазинечеткий	нечетко-полунечеткий	нечетко-квазичеткий	нечетко-четкий
1	квазинечетко-нечеткий	квазинечетко-квазинечеткий	квазинечетко-полунечеткий	квазинечетко-квазичеткий	квазинечетко-четкий
2	полунечетко-нечеткий	полунечетко-квазинечеткий	полунечетко-полунечеткий	полунечетко-квазичеткий	полунечетко-четкий
3	квазинечетко-нечеткий	квазинечетко-квазинечеткий	квазинечетко-полунечеткий	квазинечетко-квазичеткий	квазинечетко-четкий
4	четко-нечеткий	четко-квазинечеткий	четко-полунечеткий	четко-квазичеткий	четко-четкий

Напомним определение слабого решения [13] интервальной линейной системы уравнений:

$$I_A^t x = I_b^t , \tag{10}$$

где

$$I_A^t = \{ \underline{A}^t \le A^t \le \overline{A}^t \},\ I_b^t = \{ \underline{b}^t \le b^t \le \overline{b}^t \}.$$

Вектор $x \in R^n$ называется слабым решением системы (10), если он удовлетворяет для некоторых $A^t \in I_A^t$; $b^t \in I_b^t$ системе $A^t x = b^t$.

Для множества, стоящего в левой части соотношения (9), справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Если I_A^t – интервальная матрица $[\underline{A}^t, \overline{A}^t]$, где $\underline{A}^t, \overline{A}^t \in R^{m \times n}$, а $x \in R^n$, тогда

$$\{ A^t x \mid A^t \in I_A^t \} = [A_c^t x - \Delta^t |x|, A_c^t x + \Delta^t |x|]. \tag{11}$$

Доказательство

Пусть $b^t \in \{ A^t x \mid A^t \in I_A^t \}$. Тогда существует $A^t \in I_A^t$, что $A^t x = b^t$, т. е. вектор x является слабым решением интервальной линейной системы уравнений

$$A^t x = [b^t, b^t]. \tag{12}$$

Воспользуемся теоремой Оеттли-Прагера [13, с. 79]. Согласно этой теоремы, вектор x является слабым решением интервальной линейной системы уравнений $I_A^t x = I_b^t$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет неравенству:

$$|A_c^t x - b_c^t| \le \Delta^t |x| + \delta^t, \tag{13}$$

что для системы (12), поскольку $I_b^t = [b^t, b^t]$, а следовательно, а $\delta^t = 0$, и $b_c^t = b^t$, дает:

$$|A_c^t x - b^t| \le \Delta^t |x|. \tag{14}$$

Перепишем неравенство (14) в виде:

$$-\Delta^t |x| \le A_c^t x - b^t \le \Delta^t |x| ,$$

Которое разрешим относительно b^t:

$$A_c^t x - \Delta^t |x| \le b^t \le A_c^t x + \Delta^t |x| . \tag{15}$$

В силу произвольности выбора $b^t \in \{ A^t x \mid A^t \in I_A^t \}$, неравенство (15) означает, что $\{ A^t x \mid A^t \in I_A^t \} \subset [A_c^t x - \Delta^t |x|; A_c^t x + \Delta^t |x|]$, где знак $\subset$ принадлежности подмножества означает и равенство тоже. Для справедливости (11) покажем и обратное включение.

Пусть $b^t \in [A_c^t x - \Delta^t |x|; A_c^t x + \Delta^t |x|]$, тогда для него выполняется (15), (14) и (13), т. е. x является слабым решением интервальной линейной системы уравнений (12). Но это означает, что $b^t \in \{ A^t x \mid A^t \in I_A^t]$, т. е. справедливо обратное включение. Это означает, что доказательство леммы закончено.

Эту лемму используем для доказательства эквивалентности разных описаний допусковых решений нечеткой линейной системы уравнений.

Теорема 2. Следующие утверждения эквивалентны:

1) x – допусковое с типом принадлежности $< t, \tau >$ решение нечеткой линейной системы вида (4) $F_A x = F_b$;

2) x – удовлетворяет неравенству $|A_c^t x - b_c^\tau| \le -\Delta^t |x| + \delta^\tau$;

3)
$$x = x_1 - x_2, \tag{16}$$

где x_1, x_2 удовлетворяют условиям:

$$\overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \le \overline{b}^\tau; \tag{17}$$

$$\underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 \ge \underline{b}^\tau; \tag{18}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \tag{19}$$

Доказательство. Доказательство построим по схеме доказательства: из 1) вытекает 2); из 2) следует 3); из 3) получаем 1).

Докажем, что из 1) вытекает 2). В соответствии с леммой 1.

$$\{ A^t x \,\big|\, A^t \in I_A^t \} = [\, A_c^t x - \Delta^t |x|,\ A_c^t x + \Delta^t |x| \,]. \tag{20}$$

Пусть x – допусковое с типом принадлежности $<t, \tau>$ решение нечеткой системы (4), тогда по (9) и по (20):

$$[\, A_c^t x - \Delta^t |x|,\ A_c^t x + \Delta^t |x| \,] \subset [\, b_c^\tau - \delta^\tau; b_c^\tau + \delta^\tau \,]. \tag{21}$$

Включение (21) дает неравенство:

$$b_c^\tau - \delta^\tau \le A_c^t x - \Delta^t |x| \le A_c^t x + \Delta^t |x| \le b_c^\tau + \delta^\tau. \tag{22}$$

Отнимем в (22) от всех частей b_c^τ:

$$-\delta^\tau \le A_c^t x - \Delta^t |x| - b_c^\tau \le A_c^t x + \Delta^t |x| - b_c^\tau \le \delta^\tau. \tag{23}$$

Из правого неравенства в (23), перенеся $\Delta^t |x|$ вправо, имеем:

$$A_c^t x - b_c^\tau \le \delta^\tau - \Delta^t |x|. \tag{24}$$

Из левого неравенства в (23), перенеся $\Delta^t |x|$ влево, имеем:

$$\Delta^t |x| - \delta^\tau \le A_c^t x - b_c^\tau. \tag{25}$$

Объединяя (24) и (25), получаем неравенство из условия << 2) >> теоремы. Т. е., доказано следование из условия << 1) >> утверждения << 2) >>.

Докажем, что из утверждения << 2) >> вытекает условие << 3) >>. Пусть x – удовлетворяет неравенству из условия << 2) >> теоремы. Обозначим $x_1 = \max\{x, 0\}$, $x_2 = \max\{-x, 0\}$, где знаки max обозначают взятие покомпонентного максимума. Легко видеть, что $x = x_1 - x_2$, а $x_1 + x_2 = |x|$.

Справедливое неравенство из условия << 2) >> теоремы приобретает в этих обозначениях вид:

$$\Delta^t(x_1+x_2)-\delta^\tau \le A_c^t(x_1-x_2)-b_c^\tau \le -\Delta^t(x_1+x_2)+\delta^\tau . \qquad (26)$$

Вспомнив, что $\overline{A}^t = A_c^t + \Delta^t$; $\underline{A}^t = A_c^t - \Delta^t$, помножив $\overline{A}^t$ на x_1, а $\underline{A}^t$ на x_2: $\overline{A}^t x_1 = A_c^t x_1 + \Delta^t x_1$, $\underline{A}^t x_2 = A_c^t x_2 - \Delta^t x_2$, и вычтя из первого равенства второе, получаем:

$$\overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 = A_c^t(x_1 - x_2) + \Delta^t x_1 + \Delta^t x_2 . \qquad (27)$$

Выразим из (27)

$$A_c^t(x_1 - x_2) = \overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 - \Delta^t x_1 - \Delta^t x_2$$

и подставим в правую часть (26), перенеся слагаемые с Δ^t и b_c^τ в правую часть получаемого неравенства:

$$\overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \le \delta^\tau + b_c^\tau . \qquad (28)$$

Учтя, что $b_c^\tau + \delta^\tau = \overline{b}^\tau$, из (28) получаем (17).

Для получения (18) $\overline{A}^t$ умножим на x_2, а $\underline{A}^t$ – на x_1: $\overline{A}^t x_2 = A_c^t x_2 + \Delta^t x_2$; $\underline{A}^t x_1 = A_c^t x_1 - \Delta^t x_1$, и вычтем из второго равенства первое:

$$\underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 = A_c^t(x_1 - x_2) - \Delta^t x_1 - \Delta^t x_2 . \qquad (29)$$

Выразив из (29) $A_c^t(x_1 - x_2) = \underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 + \Delta^t x_1 + \Delta^t x_2$ и подставив в левую часть (26), получаем:

$$\underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 \ge b_c^\tau - \delta^\tau ,$$

что с учетом равенства $\underline{b}^\tau = b_c^\tau - \delta^\tau$ дает (18).

Справедливость (19) следует из определения x_1 и x_2. Таким образом, доказано, что из << 2) >> следует утверждение << 3) >>.

Завершает доказательство теоремы обоснование того факта, что из утверждения << 3) >> следует условие << 1) >>.

Пусть $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ – решения неравенств (17), (18). Для произвольной матрицы $A^t \in I_A^t$ и для вектора $x = x_1 - x_2$ выполняется:

$$A^t x = A^t(x_1 - x_2) \le \overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \le \overline{b}^\tau ;$$

$$A^t x = A^t(x_1 - x_2) \ge \underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 \ge \underline{b}^\tau ,$$

или

$$\underline{b}^\tau \le A^t x \le \overline{b}^\tau ,$$

т. е.

$$A^t x \in I_b^\tau \quad \forall A^t \in I_A^t ,$$

последнее означает, согласно определения 3, что x – допусковое решение нечеткой линейной системы (4).

Таким образом, теорема доказана.

Замечание. Проверка того, что x является допусковым с типом принадлежности $<t, \tau>$ решением нечеткой системы (4), может быть осуществима за полиномиальное время, поскольку это простая проверка разрешимости системы (17)-(19).

Выводы

Результаты исследования: в работе введено понятие допускового с типом принадлежности $<t, \tau>$ решения нечеткой линейной системы уравнений и дана его характеризация.

Перспективы дальнейших исследований в этом направлении: далее целесообразно провести числовые эксперименты по проверке решения нечеткой системы на допусковость.

Стаття надійшла _03_._10_._2014___
Прийнято до друку _04_._11_._2014___

Литература

1. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде – М: Мир, 1976 – 165 с.
2. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
3. Сергиенко И. В. Применение понятий размытой математики для формализации и решения комбинаторных оптимизационных задач / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – №2. – С. 158-162.
4. Сергиенко И. В. Об одной нечеткой задаче многопараметрического выбора оптимальных решений / И. В. Сергиенко, И. Н. Парасюк, М. Ф. Каспшицкая // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – №2. – С. 3-15.
5. Ємець О. О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах: монографія / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець – Полтава: ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
6. Ємець О. О. Операції та відношення над нечіткими числами / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008 – №5. – С. 39-46.
7. Ємець О. О. Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008 – №6. – С. 25-33.
8. Донец Г. А. Постановка и решение задачи о рюкзаке с нечеткими данными / Г. А. Донец, А. О. Емец // Проблемы управления и информатики – 2009. – №5. – С. 65-76.
9. Емец О. А. Операции над нечеткими числами с носителем мощности континуум для моделирования в комбинаторной оптимизации / О. А. Емец, Т. А. Парфенова // Проблемы управления и информатики. – 2010. – №2. – С. 86-101.
10. Емец О. А. Метод ветвей и границ для задач оптимизации на нечетких множествах / О. А. Емец, А. О. Емец, Т. А. Парфенова // Проблемы управления и информатики. – 2013. – №2. – С. 55–60.
11. Зайченко Ю. П. Исследование операций: Нечеткая оптимизация: Учеб. пособие / Ю. П. Зайченко. – К.: Выща шк., 1991. – 191 с.
12. Емец О. А. О слабой разрешимости и слабой допустимости нечетких линейных систем уравнений / О. А. Емец, А. О. Емец // Матеріали III Всеукраїнського наукового семінару "Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ-2013)", (Полтава, 30-31 серпня 2013 р.): тези доп. – Полтава: ПУЕТ, 2013. – С. 27-35.
13. Фидлер М. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерманн. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2008 – 288 с.
14. Емец О. А. Редукция нечетких чисел с дискретным носителем / О. А. Емец, А. О. Емец // Материалы

Международной научной конференции “Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта (ISDMCI '2012)”, (Евпатория, 27-31 2012 г.): тез. докл. – Херсон, ХНТУ, 2012. – С. 361-362.

15. Iemets O. O. About the Problem of Growing of a Discrete Fuzzy Number Carrier during Algebraic Operations. / O. O. Iemets, O. O. Yemets` // XX International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties: (Brno, Czech Republic, September 17-21, 2012): abstracts. – Kyiv. – P. 117–124.

Анотація

О. О. Ємець

Допускові розв’язки з різним типом належності для нечітких лінійних систем рівнянь

В статті наведені відомі необхідні поняття з теорії нечітких чисел та інтервальних систем, а саме, поняття: нечіткого числа, носія і функції належності нечіткого числа, дискретного і континуального нечіткого числа; інтервальної матриці; нижньої та верхньої межі інтервальної матриці; середньої матриці; матриці радіусів; інтервального вектору; нижньої та верхньої межі інтервального вектору; середнього вектору; вектору радіусів.

У роботі введені нові поняття, такі як: поняття однопікового нечіткого числа (дискретного і континуального); гострого и не гострого піку; нормального нечіткого числа; стандартного нечіткого числа; стандартизованого нечіткого числа.

В статті введено поняття нечіткої матриці, яке пов’язує інтервальний апарат і апарат нечітких чисел; введено поняття інтервальної лінійної системи рівнянь; нечіткої лінійної системи рівнянь.

В роботі введено поняття допускового з типом належності $<t,\tau>$ *розв’язку нечіткої лінійної системи і дана його характеризація.*

Доведена лема: якщо I_A^t *– інтервальна матриця, що представлена через верхню* $\overline{A}^t$ *і нижню* $\underline{A}^t$ *межі інтервальної матриці* $[\underline{A}^t, \overline{A}^t]$, *де* $\underline{A}^t, \overline{A}^t \in R^{m\times n}$, *а* x *допусковий вектор з типом належності* $<t,\tau>$, $x \in R^n$, *тоді сімейство з номером* t *правих частин систем лінійних рівнянь* $A^t x$ *можна представити через матрицю радіусів* Δ^t: $\{ A^t x \mid A^t \in I_A^t \} = [A_c^t x - \Delta^t |x|, A_c^t x + \Delta^t |x|]$.

Для сімейства з номером t $A^t x$ *правих частин систем лінійних рівнянь доведено, що наступні твердження еквівалентні: 1)* x *– допусковий з типом належності* $<t,\tau>$ *розв’язок нечіткої лінійної системи виду* $F_A x = F_b$; *2)* x *– задовольняє нерівності* $|A_c^t x - b_c^\tau| \le -\Delta^t |x| + \delta^\tau$, *де* A_c^t *– середня матриця інтервальної матриці,* b_c^τ *– середній вектор інтервального вектору,* Δ^t *– матриця радіусів інтервальної матриці,* δ^τ *– вектор радіусів інтервального вектору,*

3) $x = x_1 - x_2$, *де* x_1, x_2 *задовольняють умовам:* $\overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \le \overline{b}^\tau$; $\underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 \ge \underline{b}^\tau$; $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$, *де* $\overline{A}^t, \underline{A}^t$ *– верхня і нижня межі інтервальної матриці;* $\overline{b}^\tau$, $\underline{b}^\tau$ *– верхня і нижня межі інтервального вектору.*

Обґрунтовано, що перевірка того, що x *є допусковим з типом належності* $<t,\tau>$ *розв’язком нечіткої системи, може бути здійснена за поліноміальний час.*

Ключові слова: *нечіткі лінійні системи рівнянь, нечіткі числа, інтервальні системи, допускові розв’язки.*

Summary

O. O. Yemets`

Admitable solutions with the different type of membership for uncertain linear systems of equations

Necessary familiar concepts from fuzzy numbers theory and interval systems are presented in the article, namely, concepts of: a fuzzy number; the carrier and the membership function of fuzzy number; a discrete and continual fuzzy number; an interval matrix; low and upper bounds of an interval matrix; a middle matrix; a matrix of radiuses; an interval vector; low and upper bounds of an interval vector; a middle vector; the vector of radiuses.

New concepts such as concepts of a one-peak fuzzy number (discrete and continual); an acute and not acute peak; a normal fuzzy number; a standard fuzzy number; a standardized fuzzy number are introduced in the work.

The concepts of a fuzzy matrix, which connects interval apparatus and fuzzy numbers apparatus; interval linear systems of equations; the fuzzy linear system of equations are introduced in the work.

The concept of admitable with the type of membership $<t,\tau>$ *solution of an uncertain linear system of equations is introduced in the work. Characterization of a solution is given.*

It is proved the lemma that if I_A^t *is an interval matrix, presented through its low* $\underline{A}^t$ *and upper* $\overline{A}^t$ *bounds* $[\underline{A}^t, \overline{A}^t]$, *where* $\underline{A}^t, \overline{A}^t \in R^{m\times n}$, *and* x *is admitable with the type of membership* $<t,\tau>$ *solution,* $x \in R^n$, *then the family with the number* t *of right parts of systems of linear equations* $A^t x$ *can be presented through the matrix of radiuses* Δ^t: $\{ A^t x \mid A^t \in I_A^t \} = [A_c^t x - \Delta^t |x|, A_c^t x + \Delta^t |x|]$.

It is proved for the family with the number t $A^t x$ *of right parts of systems of linear equations, that next statements are equivalent:*

1) x *is admitable with the type of membership* $<t,\tau>$ *solution of uncertain linear system of equations of the form* $F_A x = F_b$;

2) x *satisfies the inequality* $|A_c^t x - b_c^\tau| \le -\Delta^t |x| + \delta^\tau$, *where* A_c^t *is the middle matrix of the interval matrix,* b_c^τ *is the middle vector of the interval vector,* Δ^t *is the matrix of radiuses of the interval matrix,* δ^τ *is the vector of radiuses of the interval vector.*

3) $x = x_1 - x_2$, *where* x_1, x_2 *satisfy conditions:* $\overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \le \overline{b}^\tau$; $\underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 \ge \underline{b}^\tau$; $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$, *where* $\overline{A}^t, \underline{A}^t$ *are low and upper bounds of the interval matrix;* $\overline{b}^\tau$, $\underline{b}^\tau$ *are low and upper bounds of the interval vector.*

It is substantiated that the check that x *is admitable with the type of membership* $<t,\tau>$ *solution of the uncertain system can be executed for the polynomial time.*

Key words: *uncertain linear systems of equations, fuzzy number, interval systems, admitable solutions.*

УДК 621.9.048.4 **Ю.М. Небилиця**

ОПЕРАТИВНИЙ КОНТРОЛЬ ВІДХИЛЕНЬ ФОРМИ ПОВЕРХНІ ПРИ ЕЛЕКТРОЕРОЗІЙНОМУ ВИРІЗАННІ МЕТОДОМ ПАРАБОЛІЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Набули подальшого розвитку методи експрес-контролю технологічного процесу електроерозійної розмірної обробки. Отримано аналітичні моделі оцінки рівня відхилень форми поверхні за характером флуктуацій енергії імпульсів при електроерозійному вирізанні. Визначено технологічні особливості використання запропонованого методу при отриманні прогнозу показників якості.

Ключові слова: *електроерозійне дротяне вирізання, аналітична модель, форма поверхні, експрес-контроль, флуктуація енергії, параболічна апроксимація*.

Вступ

Електроерозійне дротяне вирізання (ЕЕДВ) відноситься до групи фізико-технічних методів розмірної обробки. Основним технологічним спрямуванням такої обробки є зміна форми заготовки. Ряд таких переваг, як висока точність, можливість обробки струмопровідних матеріалів довільної твердості, отримання виробу складної форми із заданими властивостями поверхні без перебазування і, навіть, в один прохід, зумовили широке застосування електроерозійних вирізних верстатів (ЕЕВВ) в інструментальному та в дрібносерійному виробництві.

Фізичне старіння систем та вузлів ЕЕВВ зумовлює зниження продуктивності, точності та збільшує шорсткість обробленої поверхні [1]. За таких обставин ефективність електроерозійної обробки суттєво знижується, а в ряді випадків – до неприйнятного рівня. Встановлення якості деталі протягом технологічного циклу є неможливим внаслідок малої ширини пазу, занурення заготовки у технологічну рідину, закриттям зони обробки елементами конструкції верстату. Процес формування поверхні тривалий, інколи, вирізання здійснюється протягом декількох діб. За такий значний відрізок часу умови перебігу обробки та стан систем верстату можуть суттєво змінитися. Тому здійснення контролю якості тільки по завершенні процесу обробки приводить лише до констатації наявного стану, що часто робить неможливим упередження технологічного браку або економічно недоцільним його виправлення. На жаль, програмно-апаратне забезпечення сучасних ЕЕВВ не дозволяє здійснювати прогнозування результатів обробки, що зумовлено багатофакторністю протіканням технологічного процесу електроерозійної розмірної обробки та недостатнім рівнем його формалізації. З цих причин, актуальність даної роботи полягає в отриманні математичних моделей відхилення форми та шорсткості поверхні за флуктацією енергії, яка виділяється в міжелектродному проміжку (МЕП).

Метою проведення даних наукових досліджень було отримання методу прогнозування показників якості деталі за даними процесу електроерозійної розмірної обробки. Практична цінність представленої роботи полягає у підвищенні експлуатаційної ефективності електроерозійного устаткування. Об'єктом досліджень є методи цифрової обробки сигналів технологічних процесів. Предметом дослідження є застосування методів статистичної обробки даних в задачах прогнозування показників якості електроерозійного вирізання.

Постановка задачі

Проведення оперативного контролю повинне відповідати ряду критеріїв: не чинити впливу на перебіг процесу формоутворення, забезпечувати комплексність діагностичних даних, мати добру узгодженість з динамікою та базовими параметрами процесу обробки. Для досягнення зазначених критеріїв доцільно в якості вхідних даних обрати величину імпульсів технологічного струму. Такий вид сигналу має добру кореляцію із енергетикою процесу та показниками зняття матеріалу заготовки [2; 3].

Виходячи із мети роботи, в задачу досліджень ставилося:

- отримання аналітичних моделей оцінки таких відхилень форми поверхні, як хвилястість, конусоподібність, бочкоподібність, сідлоподібність, в діапазоні 0..50 мкм;
- визначення похибки оцінки показників якості поверхні;
- розробка методики проведення експрес-контролю процесу ЕЕ вирізання;
- проведення перевірки на адекватність отриманих моделей та ефективності методу шляхом чисельного моделювання та натурних досліджень.

При синтезі моделей необхідно забезпечити мінімізацію витрат обчислювальної потужності та обсягу пам’яті, можливість проведення експрес-контролю на всіх режимах електроерозійної розмірної обробки.

Особливості формування вхідних даних

Незважаючи на те, що поставлені задачі можуть бути вирішені у більш формалізований спосіб, з огляду на потребу знаходження більш зручного підходу до представлення вхідних даних та використання отриманих результаті, доцільно описати основні фізично-технічних аспекти процесу ЕЕДВ, вигляд перебігу якого відображено на рис. 1*а*. Для здійснення процесу до МЕП, який утворений тілом заготовки п. 1 та натягнутим дротяним електродом п. 2 малого діаметру d_e=0,1..0,25 мм, підводяться імпульси напруги 40..150 В. У більшості випадків, підведення напруги спричиняє пробиття проміжку і, як наслідок, проходження імпульсу технологічного струму I_m та виділення енергії $E_m^{(1)}$ (верхній індекс вказує, що мова йде про енергію одиничного імпульсу). Внаслідок того, що витримка часу фіксації зображення становила 1/60 с, на рис. 1*а* серія розрядів проявляється у вигляді множини яскравих цяток вздовж дротяного електроду інструменту (ДЕІ) по всій висоті пазу $H_д$, що зумовлено ефектом групування розрядів. Формоутворення при дротяному вирізанні здійснюється за рахунок ерозії матеріалу заготовки від виділення $E_m^{(M)}$ послідовності імпульсів I_m. Для здійснення ЕЕДВ використовують ряд конструктивних елементів, наведених на рис. 1*б*. До таких елементів відносяться верхня та нижня камера, які мають струмопідводи п. 3 та сопло формування промивки п. 4. Зазначене технологічне забезпечення спричиняє подовження ділянки проходження I_m по ДЕІ на величину $l_{н.т}$. В подальшому, з метою спрощення викладок, буде вважатися, що зазначені ділянки для верхньої та нижньої камер однакові, в цьому випадку технологічна довжина ДЕІ становить $L_m = L_д + 2 \cdot l_{н.т}$. За початок відліку обрано нижню поверхню заготовки.

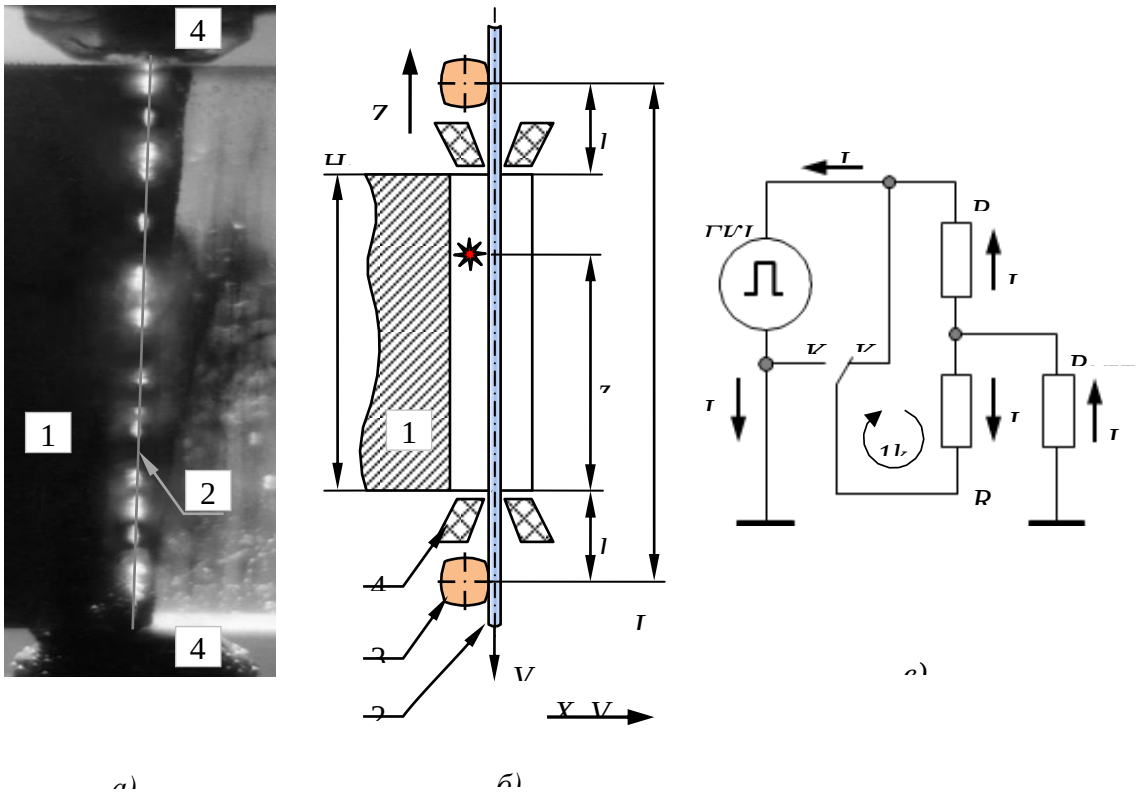


Рис. 1 Зображення перебігу процесу ЕЕДВ, розрахункова

Пропонується визначати місце проходження імпульсу струму на поточний момент часу за диференціальним методом, який реалізується за принциповою електричною схемою рис. 1*в*. Згідно схеми вважається, що генератор коротких імпульсів (ГКІ) підключено до заготовки позитивним полюсом, до ДЕІ – негативним. Такий вид підключення забезпечує асиметрію виділення енергії, і відповідно, співвідношення рівня ерозії матеріалу деталі до ДЕІ $k_a \in [3;8]$. Струми $I_н$ та $I_в$, які протікають, відповідно, через нижню та верхню ділянки ДЕІ, доцільно визначати за допомогою імпульсних одновиткових трансформаторів, які надіті на силові дроти в місці підключення до струмопідводів п. 3. За допомогою комутатора *K* схему збору даних можна переводити в режим калібровки чи поточного вимірювання, останній режим буде вважатися за основний.

За другим законом Кірхгофа рівняння для контуру *1k* буде мати наступний вид:

$$R_н \cdot I_н - R_в \cdot I_в = 0. \tag{1}$$

Якщо прийняти за усереднений лінійний питомий опір електроду $\bar{\rho}_{ДЕІ}$, то, з урахуванням довжини нижньої та верхньої ділянок ДЕІ, рівняння (1) набуде виду:

$$\bar{\rho}_{ДЕІ} \cdot l_н \cdot I_н - \bar{\rho}_{ДЕІ} \cdot l_в \cdot I_в = 0. \tag{2}$$

Виразивши струм $I_н$ через сумарний струм, підставивши L_m у вираз (2) та провівши спрощення, було отримано формулу визначення положення розряду:

$$z(I_н, I_в) = L_m \cdot (I_н / I_в + 1)^{-1} - l_{н.m}. \quad (3)$$

Похибка визначення положення проходження розряду більшою мірою залежить від величини розрядності АЦП m і може знаходитись за формулою:

$$z_{error} = \pm L_m \cdot 2^{-(m+1)}. \quad (4)$$

Вибір обсягу вибірки для проведення експрес-контролю процесу ЕЕ вирізання слід здійснювати у відповідності до вимог теорії цифрової обробки сигналів [4], у більшості випадків – це вимога забезпечення умови стаціонарності сигналу. В подальших викладках вимоги до формування вибірки будуть уточнені.

Первинна обробка вхідних даних полягає в перетворенні величини енергії, яка була підведена до зони обробки, у значення характерного розміру зняття матеріалу. Таке перетворення можливо реалізувати, знаючи коефіцієнт ефективності використання енергії імпульсу k_v, діаметр ДЕІ $d_{ДЕІ}$ та величину міжелектродного проміжку $\delta_{МЕП}$.

Припустимо, що внаслідок виділення енергії M імпульсів відбулося вирізання $l_в$ пазу, еквівалентне видаленню об'єму матеріалу $V_в = l_в \cdot (d_{ДЕІ} + 2 \cdot \delta_{МЕП}) \cdot H_д$, тоді $k_v = V_в / E_m^{(M)}$. Виходячи із міркувань, що на формування бокової поверхні деталі припадає лише частина загальної енергії $E_m^{(M)}$, а розбиття висоти заготовки здійснено на інтервали $\Delta z = H_д \cdot 2^{-m}$, отримуємо величину зняття матеріалу на довільному інтервалі за формулою:

$$h_i = 2^m \cdot \frac{2 \cdot \delta_{МЕП}}{d_{ДЕІ}} \cdot \left(d_{ДЕІ} + 2 \cdot \delta_{МЕП}\right) \cdot M^{-1} \cdot K_i, \quad (5)$$

де K_i – кількість ефективних імпульсів, які зумовили ерозію на ділянці z_i. Якщо прийняти за базу вимірювання фіксовану кількість імпульсів M, тоді вираз (5) можна суттєво спростити. Наприклад, для більш типового випадку ЕЕДВ $d_{ДЕІ}$=0,2 мм і $\delta_{МЕП}$ =0,02 мм при M=10 000 і m=5 формула для визначення величини зняття матеріалу ділянки z_i буде мати вигляд:

$$h_i = 1{,}536 \cdot 10^{-4} \cdot K_i. \quad (6)$$

Моделі оцінки відхилень форми поверхні

При ЕЕДВ таке відхилення форми поверхні, як конусоподібність, утворюється з причини високого рівня зносу ДЕІ. Так, внаслідок переміщення ДЕІ від верху до низу заготовки, величина його ерозії збільшується, що, як правило, зумовлює звуження утвореного в процесі вирізання пазу в нижній частині деталі. Внаслідок гідравлічних збурень МЕП чи коливання ДЕІ можливі випадки, коли вигляд спотворень форми утвореної поверхні має інший вид. Враховуючи, що вигляд спотворення апріорно невідомий, при оперативній оцінці необхідно визначати як вид, так і величину відхилення форми поверхні.

Допуски форми та розташування поверхні регламентує ДСТУ 2498-94 [5]. В межах цього нормативного документу виділяються такі основні види відхилень форми як конусоподібність та овальність. Конусоподібність – таке відхилення профілю поверхні, при якому опорна і базова лінія є прямолінійними, але не паралельними. Овальність, з іншої сторони, характеризується таким відхиленням від базової лінії профілю, при якому реальна лінія є кривою другого порядку. У свою чергу, овальність може мати як бочкоподбний, так і сідлоподібний вигляд. Бочкоподібність – таке відхилення, при якому опорна лінія профілю є випуклою. При сідлоподібності опорна лінія профілю являє собою криву з явно вираженою впадиною. У кількісному відношенні конусоподібність, бочкоподібність і сідлоподібність визначаються як максимальне відхилення між реальною та базовою лініями профілю поверхні.

Вивчення поверхні деталей, отриманих ЕЕДВ, дозволило висунути гіпотезу, що більш загальним випадком представлення форми поверхні є модель у вигляді параболи, яка представлена поліномом:

$$y(z) = a0 + a1 \cdot z + a2 \cdot z^2 . \tag{7}$$

Обчислення коефіцієнтів поліному проводиться на основі отриманих в процесі ЕЕДВ даних на контрольованому інтервалі різу, а саме множини $\boldsymbol{H}=\{h_i\}$, яка знаходиться шляхом використання формул (5) або (6) за значеннями розподілу енергії по висоті пазу, вираженого у формі інтервального динамічного ряду $\boldsymbol{Z}=\{z_i\}$. Операцію параболічної апроксимації доцільно здійснювати за методом найменших квадратів [6]. У цьому випадку коефіцієнти поліному (7) можливо знайти матричним способом:

$$\begin{pmatrix} a0 \cdot n & a1 \cdot \sum_{i=0}^{N} z_i & a2 \cdot \sum_{i=0}^{N} z_i^2 \\ a0 \cdot \sum_{i=0}^{N} z_i & a1 \cdot \sum_{i=0}^{N} z_i^2 & a2 \cdot \sum_{i=0}^{N} z_i^3 \\ a0 \cdot \sum_{i=0}^{N} z_i^2 & a1 \cdot \sum_{i=0}^{N} z_i^3 & a2 \cdot \sum_{i=0}^{N} z_i^4 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{N} h_i \\ \sum_{i=0}^{N} (h_i \cdot z_i) \\ \sum_{i=0}^{N} (h_i \cdot z_i^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

де n – довжина динамічного ряду $\boldsymbol{Z}$, а $N= n-1$.

З метою спрощення обчислення коефіцієнтів полінома (7) та враховуючи достатньо низький ранг матриць, доцільно її розв’язок провести методом Крамера, що дозволить шляхом замін

$$z0 = n, \; z1 = \sum_{i=0}^{N} z_i, \; z2 = \sum_{i=0}^{N} z_i^2, \; z3 = \sum_{i=0}^{N} z_i^3$$

$$h0 = \sum_{i=0}^{N} h_i, \; h1 = \sum_{i=0}^{N} (h_i \cdot z_i), \; h2 = \sum_{i=0}^{N} (h_i \cdot z_i^2) \tag{9}$$

записати визначники матриць у вигляді:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} z0 & z1 & z2 \\ z1 & z2 & z3 \\ z2 & z3 & z4 \end{vmatrix}, \ \Delta a0 = \begin{vmatrix} h0 & z1 & z2 \\ h1 & z2 & z3 \\ h2 & z3 & z4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta a1 = \begin{vmatrix} z0 & h0 & z2 \\ z1 & h1 & z3 \\ z2 & h2 & z4 \end{vmatrix}, \ \Delta a2 = \begin{vmatrix} z0 & z1 & h0 \\ z1 & z2 & h1 \\ z2 & z3 & h2 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Коефіцієнти параболічної апроксимації знаходяться за виразами:

$$a0 = \Delta a0 / \Delta A, \ a1 = \Delta a1 / \Delta A, \ a2 = \Delta a2 / \Delta A. \tag{11}$$

З метою спрощення програмної реалізації обчислень, доцільно отримати скалярні вирази дискримінантів (10):

$$\begin{aligned} &\Delta A = z0 \cdot (z4 \cdot z2 - z3^2) + z1 \cdot (2 \cdot z2 \cdot z3 - z4 \cdot z1) - z2^3; \\ &\Delta a0 = h0 \cdot (z4 \cdot z2 - z3^2) + hz \cdot (z2 \cdot z3 - z1 \cdot z4) + hz2 \cdot (z1 \cdot z3 - z2^2); \\ &\Delta a1 = h0 \cdot (z2 \cdot z3 - z1 \cdot z4) + hz \cdot (z0 \cdot z4 - z2^2) + hz2 \cdot (z1 \cdot z2 - z0 \cdot z3); \\ &\Delta a2 = h0 \cdot (z3 \cdot z1 - z2^2) + hz \cdot (z1 \cdot z2 - z0 \cdot z3) + hz2 \cdot (z0 \cdot z2 - z1^2) \end{aligned} \tag{12}$$

Всі члени виразів (12), крім *h0, hz, hz2*, є константами, оскільки довжина вектора ***Z*** апріорно відома з апаратно-програмної реалізації. Дана обставина дозволяє розрахунок констант провести на етапі ініціалізації чи задати у табличному виді, при таких підходах обчислення коефіцієнтів поліному проводиться за наступними формулами:

$$\begin{aligned} &a0 = h0 \cdot k00 + hz \cdot k01 + hz2 \cdot k02; \\ &a1 = h0 \cdot k10 + hz \cdot k11 + hz2 \cdot k12; \\ &a2 = h0 \cdot k20 + hz \cdot 21 + hz2 \cdot k22 \end{aligned} \tag{13}$$

де константи *kXY* розраховуються за виразами:

$$\begin{aligned} &k00 = \frac{z2 \cdot z4 - z3^2}{\Delta A}, \ k01 = \frac{z2 \cdot z3 - z1 \cdot z4}{\Delta A}, \ k02 = \frac{z1 \cdot z3 - z2^2}{\Delta A}; \\ &k10 = k01, \ k11 = \frac{z0 \cdot z4 - z2^2}{\Delta A}, \ k12 = \frac{z1 \cdot z2 - z0 \cdot z3}{\Delta A}; \\ &k20 = k02, \ k21 = k12, \ k22 = \frac{z0 \cdot z2 - z1^2}{\Delta A}. \end{aligned} \tag{14}$$

Визначення виду відхилень форми поверхні проводиться шляхом порівняння значень ефективних розмірів профілю оцінки *y(0), y(H∂/2)* та *y(H∂)* за аналітичними моделями:

$$\begin{aligned} & p(К \mid (y(0) > y(H_\partial/2) \,\&\, y(H_\partial/2) > y(H_\partial)) \vee \\ & (y(0) < y(H_\partial/2) \,\&\, y(H_\partial/2) < y(H_\partial))) = 1; \\ & p(Б \mid y(0) < y(H_\partial/2) \,\&\, y(H_\partial/2) > y(H_\partial)) = 1\ ; \\ & p(С \mid y(0) > y(H_\partial/2) \,\&\, y(H_\partial/2) < y(H_\partial)) = 1 \end{aligned} \tag{15}$$

де *p(К), p(Б), p(С)* – ймовірності наявності виду відхилення форми поверхні, відповідно, конусоподібності, бочкоподібністі та сідлоподібності. Визначення овальності може проводитись з виразів $p(O \mid К \vee С) = 1$ або $p(O \mid К) = 0$.

Величину відхилень форми поверхні слід розраховувати за формулою:

$$\delta_ф = \underset{z \in [0,\, H_\partial]}{Argmax}\,(y(z)) - \underset{z \in [0,\, H_\partial]}{Argmin}\,(y(z)) \tag{16}$$

На практиці зручно максимальне і мінімальне значення функції *y(z)* вибирати із ряду *y(0), y(H∂/2)* та *y(H∂)* у відповідності до умов (15) за видом спотворення форми.

Моделювання процесу оцінки відхилень форми поверхні

В задачу даного етапу науково-дослідних робіт ставилось: здійснення перевірки ефективності використання отриманих математичних моделей визначення виду та величини відхилення форми поверхні за методом параболічної апроксимації; встановлення оптимального рівня дискретизації висоти різу; оцінка чутливості методики до характеру зміни висот профілю h_i. Перевірка проводилась шляхом варіації коефіцієнтів поліному (7) таким чином, щоб відповідна йому крива більшою мірою відображала типові відхилення форми поверхні, які мають місце при ЕЕДВ. З метою відтворення мікронерівності поверхні, на криву адитивно накладався шум, який відповідає нормальному, експоненціальному розподілу та розподілу Пуассона, а також у вигляді синусоїдального сигналу. Амплітуда шуму варіювалась в межах від 0,1 до 0,5 заданого значення відхилення форми. Точність апроксимації визначалась як сума відношень відповідних коефіцієнтів заданого полінома та отриманого в результаті обчислень. Моделювання здійснювалось у середовищі Mathcad 7, його результати для випадку накладання шуму у вигляді синусоїдального сигналу амплітудою $A_m = 6 \cdot 10^{-4}$ і частотою $\varpi_m = 7 \cdot \pi / 10$ приведені на рис. 2. Перевага, яка надавалась у дослідженнях синусоїдальному шуму, зумовлена характером перебігу ЕЕДВ, зокрема – наявністю коливання ДЕІ внаслідок локального виділення енергії імпульсів, що спричиняє появу мікронерівністі поверхні у вигляді хвилястості.

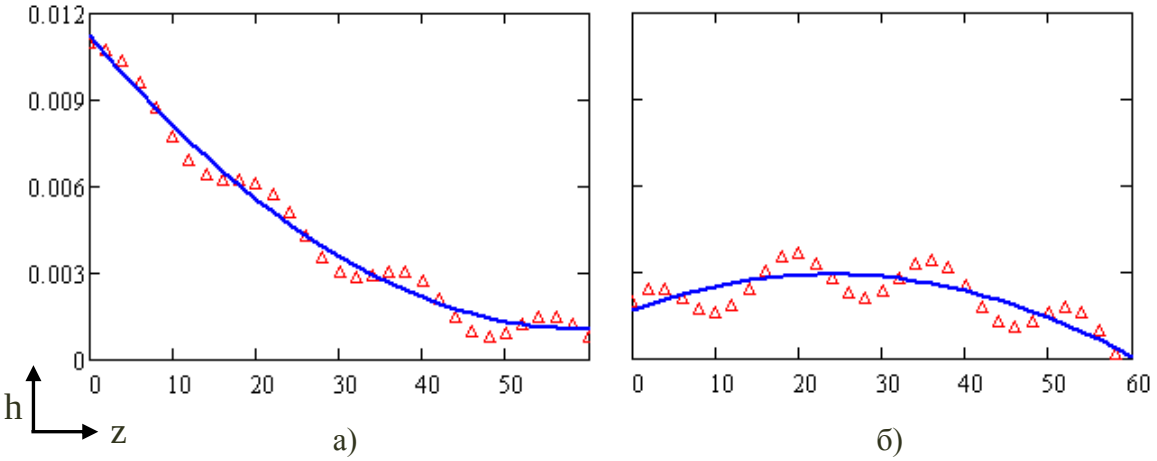


Рис. 2 Результати моделювання оцінки форми поверхні

△△△ – вхідні даних; —— – результати апроксимації.

Моделювання відхилення виду конусоподібність, яка задана поліномом $y(z) = 10^{-5} \cdot z^2 - 6{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot z + 0{,}011$, приведено на рис. 2а. Випадок спотворення форми поверхні типу бочкоподібність визначений поліномом $y(z) = -10^{-5} \cdot z^2 + 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot z + 0{,}0014$ та відображений на рис. 2б. Отримані результати засвідчують добрий рівень апроксимації. Так, на всьому інтервалі моделювання відносна похибка не перевершувала величину 12,5%, що є прийнятним рівнем при проведенні оперативного контролю якості поверхні.

Необхідність проведення апроксимації для встановлення виду і величини спотворення форми демонструє рисунок 2б. З нього видно, що локалізація мінімального та максимального відхилень профілю поверхні шляхом співставлення значень з множини вхідних даних є неоднозначною.

Результати натурних досліджень

Апробація запропонованої методики оперативного контролю відхилень форми поверхні проводились на верстаті «СЕЛД-02», укомплектованому генератором технологічного струму ГКИ-200. Обробка проводилась на чорнових режимах 2.2 та 2.3, частота імпульсів 22 кГц, напруга імпульсів 60 і 100 В, відповідно. Регулятором подачі змінювалось відношення кількості робочих імпульсів до їх загального числа в межах 0,7..0,9. Швидкість подачі ДЕІ задавалась 50 та 80 мм/с. В якості матеріалу заготовки обрано сталь 20, сталь ХВГ та дюралюміній Д16.

Перевірка ефективності оперативно контролю відхилень форми поверхні при ЕЕДВ проводилась наступним чином. Із заготовок висотою 30 та 60 мм при незмінному режимі обробки вирізались квадрати 10х10 мм. Нижній бік деталі та напрям обробки маркувалися. Для стальних зразків відкладення на поверхні продуктів ерозії, матеріалу ДЕІ та білого шару видалялись шляхом протраву отриманих зразки в 20% розчині азотної кислоти. Після такої обробки зразки промивались дистильованою водою та просушувались в потоці стисненого повітря. Вимірювання проводилось за допомогою багатооборотної індикаторної головки 2-МИГ модель 05102 (1 клас точності (ГОСТ 9696), діапазон вимірювання 2,0 мм, ціна поділки 0,002 мм, допустима похибка 2 поділки). Заміри проходили на шліфованій гранітній плиті, на яку клалися отримані зразки обробленою стороною. З протилежної сторони (теж обробленої) зразка підводився шуп індикаторної головки. Зразок переміщувався відносно щупа від

нижньої сторони до верхньої. Покази індикаторної головки ділились на два та фіксувалися. На фінальній стадії перевірки результати оперативного контролю порівнювались із результатами стендових вимірювань. В ході досліджень встановлено, що достовірність визначення величини відхилень шляхом апроксимації вхідних даних слід приймати на рівні 0,87.

Висновки

За результатами проведених науково-дослідних робіт встановлено наступне. Характер флуктації енергії, яка виділяється в МЕП, сильно корелює з коливальними, гідродинамічними і тепловими процесами ЕЕДВ, являє собою відображення перебігу технологічного процесу та стану підсистем ЕЕВВ. Аналіз статистичних даних виділення енергії у МЕП дозволяє прогнозувати показники якості обробки. Так, із розподілу енергії вздовж ДЕІ можливо, з прийнятним рівнем достовірності, за методом параболічної апроксимації визначити відхилення форми поверхні, а саме: конусо-, сідло- та бочкоподібність. Отримані результати досліджень є підґрунтям для створення підсистеми експрес-діагностики технологічного процесу та підвищення на їхній основі експлуатаційної ефективності ЕЕВВ.

Література

1. Фотеев Н. К. Качество поверхности после электроэрозионной обработки. – СТИН. –1997. – С. 43-48.
2. Небилиця Ю. М. Методика реєстрації енергії імпульсів технологічного струму в процесах електроерозійної обробки / Небилиця Ю. М., Осипенко В. І. // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник (за напрямом «Інженерна механіка»). – 2001. – Випуск 8. – С.183-190.
3. Небилиця Ю. М. Методика визначення прогину дротяного електрода без зупинки процесу електроерозійного вирізання / Небилиця Ю. М., Осипенко В. І. // Вісник Черкаського інженерно-технологічного інституту. – 2001. – №3. – С.205-210.
4. Шрюфер Э. Обработка сигналов: цифровая обработка дискретизированных сигналов: Учебник / Под. ред. проф. В. П. Бабака. – К.: Либідь. – 1995. – 320 с.
5. Основні норми взаємозамінності. Допуски форми та розташування поверхні. Терміни та визначення ДСТУ 2498-94 – [Чинний від 01.01.1995]. – К. Держспоживстандарт України 2012. – 113 с. – (Національний стандарт України).
6. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. – М.: Физматгиз. – 1958. – 334 с.

Стаття надійшла _07_._10_._2014___
Прийнято до друку _04_._11_._2014___

Аннотация

Ю. Н. Небылица

Оперативный контроль отклонений формы поверхности при электроэрозионном вырезании методом параболической аппроксимации

Нашли развитие методы экспресс-контроля технологического процесса электроэрозионной размерной обработки. Получены аналитические модели оценки уровня отклонений формы поверхности исходя из характера флуктуаций энергии импульсов при электроэрозионном вырезании. Определены технологические особенности применения предложенного метода при прогнозировании показателей качества.

Ключевые слова: *электроэрозионное проволочное вырезание, аналитическая модель, форма поверхности, экспресс-контроль, флуктуация энергии, параболическая аппроксимация.*

Summary

Yu. M. Nebylytsia

The rapid control of the form rejections of surface at electro-erosive cutting using the parabolic approximation method

The rapid control method of wire cutting electro-erosion technological process has purchased subsequent development. The estimation analytical models of surface form level rejections from character of energy fluctuations of impulses at electro-erosive cutting are got coming. The technological features of the use of the offered method in the receipt of quality indexes prognosis are described here.

Key words: *electro-erosive wire cutting, analytical model, form of surface, rapid control, energy fluctuation, parabolic approximation.*

УДК 519.71 О.М. Назаренко, А.О. Борода

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ МАКРОЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Розглядається проблема моделювання та прогнозування стаціонарних часових рядів, що описують слабо формалізовані процеси. Пропонується методика специфікації та ідентифікації лінійної стаціонарної моделі в рамках n-вимірного фазового простору на прикладі динамічного міжгалузевого балансу реальних макроекономічних систем.

Ключові слова: *лінійна стаціонарна модель, циклічні процеси, специфікація, ідентифікація, прогнозування.*

Вступ

Дослідження технічних та економічних процесів повинне спиратись на постійний аналіз статистичних даних [1]. Для конструювання динамічних моделей в економіці необхідно скласти принципи, які ґрунтуються на економічній теорії і дозволяють генерувати рівняння, що адекватно визначають еволюцію досліджуваного процесу. Під математичною моделлю будемо розуміти аналітичні співвідношення, які випливають із сформульованого принципу і розробленого способу обробки статистичних даних. Складені рівняння повинні коректуватись або уточнюватись по мірі надходження нових даних.

Головною ідеєю сучасного математичного моделювання є вивчення реальних динамічних систем за допомогою диференціальних або диференціально-алгебраїчних рівнянь. Однак параметри цих рівнянь, як правило, заздалегідь невідомі. Невизначеними є також фазові координати $\mathbf{x}$, які б однозначно і повністю визначали поведінку даної системи. Тому на практиці будь-якій прямій задачі (імітація, прогнозування, оптимізація) завжди передує обернена задача (специфікація моделі, ідентифікація параметрів та величин, що входять до неї).

Економічні, технічні, як і багато інших слабо формалізованих систем, є керованими. Вектор керувань $\mathbf{u}$ подається на вхід динамічної системи і за його допомогою можна вирішувати проблему специфікації фазових координат та здійснювати керування їх рухом. Конструювання закону керування необхідно здійснювати за допомогою регулюючого пристрою і таким чином переводити систему із деякого початкового стану $\mathbf{x}_0$ в момент часу t_0 в кінцевий бажаний стан $\mathbf{x}_*$ в момент часу t_*. Регулятор повинен реалізувати найважливішу ідею теорії керування – принцип оберненого зв'язку [2], який вказує на те, щоб вектор керувань $\mathbf{u}$ в кожний момент часу був функцією фазових координат $\mathbf{x}$ та їх похідних $\dot{\mathbf{x}}$.

Особливістю моделювання макроекономічних систем є те, що невідомими є не лише коефіцієнти диференціальних рівнянь, які описують дану систему, а й розмірність n фазового простору. У подібних ситуаціях не специфікованими залишаються компоненти фазового вектора $\mathbf{x}$ і керування $\mathbf{u}$. У даній роботі на прикладі динамічного міжгалузевого балансу реальних макроекономічних систем розробляється методика специфікації та ідентифікації лінійної стаціонарної моделі в рамках n-вимірного фазового простору. Моделювання фазових траєкторій і керувань проводиться з урахуванням циклічності, притаманній макроекономічним процесам, і відбувається шляхом виділення гармонічних хвиль, що розповсюджуються в даній системі.

Постановка задачі

Нехай в N цілочисельних точках проміжку $[t_0, t_1)$ з відрізка $[t_0, t_k]$ відома статистична інформація $\{x_t\}$ і $\{u_t\}$ про еволюцію показників x і u даної динамічної системи. Множини x і u необхідно розкласти на підмножини $x_1, x_2, \dots, x_n$ і $u_1, u_2, \dots, u_n$, для яких відомі статистичні дані $\{x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tn}\}$ і $\{u_{t1}, u_{t2}, \dots, u_{tn}\}$, $t = \overline{1,N}$.

Стан системи будемо характеризувати фазовим вектором $\mathbf{x}(t)$, а вхід системи – вектор-стовпцем керувань $\mathbf{u}(t)$ із n-вимірного простору E^n (значення n заздалегідь невідоме). Фазова траєкторія $\{\mathbf{x}(t)\}$ і траєкторія керувань $\{\mathbf{u}(t)\}$ вважаються неперервними вектор-функціями часу і задовольняють задачу Коші:

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_*) = \mathbf{x}_*, \ t \in [t_0, t_k], \tag{1}$$

де A і B – квадратні матриці (B – невироджена матриця), які разом з граничним значенням $\mathbf{x}_*$ заздалегідь невідомі.

Модель типу (1) розповсюджена на практиці. Так, наприклад, функціонування багатогалузевого господарства вимагає балансу між окремими галузями.

В. Леонтьєв [3] запропонував (1) як динамічну модель міжгалузевого балансу, в якій $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t))'$ і $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))'$ – вектор-стовпці валових випусків і невиробничого споживання n галузей; A – матриця прямих витрат, B – матриця приростних капіталовкладень. З економічної точки зору рівність (1) показує поділ вектора валових випусків на три частини: $A\mathbf{x}(t)$ – поточне виробниче споживання, включаючи амортизацію; $B\dot{\mathbf{x}}(t)$ – капітальні витрати на розширення виробництва; $\mathbf{u}(t)$ – кінцеве (невиробниче) споживання.

Метою даної роботи є прогнозування майбутніх станів системи. Тому покладемо $t_* = t_1 = N + 1$, тоді відрізок [1, N] будемо називати періодом ідентифікації, а відрізок $[t_*, t_k]$ – періодом прогнозування. При оцінених значеннях параметрів A, B, $\mathbf{x}_*$ розв'язок задачі Коші (1) дозволяє перевіряти імітаційні властивості на проміжку $[1, t_*)$ і встановлювати прогнозні властивості моделі (1) на відрізку $[t_*, t_k]$.

Зазначимо, що довжина вибірки N повинна бути достатньо великою, щоб стабілізувались взаємозв'язки між елементами системи. Стаціонарність моделі характеризується високою якістю апроксимації, прогнозування та робастністю [4, 5]. Якщо виконані умови стаціонарності, то оцінену на періоді ідентифікації [1, N] лінійну модель (1) можна переносити на період прогнозування $[t_*, t_k]$ за умови $t_k - t_* << N$ в силу інерційності динамічної системи [5].

Вектор $\mathbf{x}(t)$ можна шукати за допомогою декомпозиції траєкторій руху фазових координат на складові [6]. Якщо ці траєкторії ідентифіковані за даними спостережень, то вектор керувань $\mathbf{u}(t)$ може бути знайдений за допомогою оберненого зв'язку:

$$\mathbf{u}(t) = P\,\mathbf{x}(t) - B\,\dot{\mathbf{x}}(t), \quad P = E - A, \ t \in [t_0, t_k] \tag{2}$$

Основна проблема, яка тут виникає, полягає у знаходженні оптимальних значень довжини N періоду ідентифікації, розмірності n фазового простору та специфікації компонент фазового вектора $\mathbf{x}$ і вектора керувань $\mathbf{u}$. Велику роль при вирішенні цієї

проблеми відіграє регулятор. У якості регулятора будемо використовувати допоміжну інформацію відносно величин, які не присутні в рівнянні руху, але є невід'ємною частиною даної динамічної системи [6]. Додатковими величинами системи повинні бути обрані такі її характеристики, що акумулюють якомога більше інформації про досліджувану систему в цілому і відносно яких є доступні статистичні дані. У цій роботі регулятор буде складатись з двох пристроїв, які у будь-який момент часу t формують сумарні значення фазових координат і керувань

$$x(t) = \sum_{m=1}^{n} x_m(t), \quad u(t) = \sum_{m=1}^{n} u_m(t) \tag{3}$$

Тоді, якщо модельні траєкторії $\mathbf{x}(t)$ і $\mathbf{u}(t)$ налаштовані на високі імітаційні та прогнозні властивості, то і сумарні траєкторії (3) повинні мати такі ж властивості.

Метод розв'язання задачі

Розв'язок задачі Коші (1) будемо шукати за допомогою декомпозиції траєкторій руху фазових координат на складові. Тенденцію розвитку будемо характеризувати лінійним трендом, а коливальний процес лінійною комбінацією гармонік з деякими частотами. Регресійну модель $\mathbf{x}$ будемо подавати у вигляді:

$$\mathbf{x}_t - \mathbf{x} = \mathbf{b}(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} (\boldsymbol{a}_k \cos\omega_k t + \boldsymbol{b}_k \sin\omega_k t) + \boldsymbol{\nu}_t, \ \omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \ t = \overline{1,N}. \tag{4}$$

де ω_k – частота k-ї гармоніки; $\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_k \ (k = \overline{1, n-1})$ – вектори невідомих коефіцієнтів розкладу в обрізаний ряд Фур'є; $\boldsymbol{\nu}_t$ – вектор випадкових збурень.

Аналіз циклічних процесів, які відбуваються в макросистемах показує [7], що в них можуть розповсюджуватись хвилі Кондратьєва (k=1), Кузнеця (k=3), Жугляра (k=6). Крім того, можуть бути й інші хвилі. Це вказує на те, що кількість секторів $n \geq 5$, і до цього результату ми повинні прийти, оцінюючи регресійну модель (4). Рафінування (відкидання незначущих МНК-оцінок коефіцієнтів ряду Фур'є) цієї моделі будемо здійснювати за допомогою критерію Ст'юдента [8].

Встановлення частот із спектра (4), на які налаштовані гармонічні хвилі, і визначення періоду коливання T досліджуваної системи можна здійснювати за допомогою першого пристрою регулятора (3), що обчислює суму фазових координат. Для цього розглянемо регресійну модель.

$$x_t - \bar{x} = b(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t) + \boldsymbol{\nu}_t, \ t = \overline{1, N}. \tag{5}$$

При встановленому тренді будемо також розглядати регресійну модель коливань:

$$\varepsilon_t = \sum_k (a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t) + \nu_t, \ t = \overline{1, N} \tag{6}$$

Процес виділення значущих гармонічних хвиль, характерних для даної системи, необхідно проводити сумісно з визначенням періоду коливань *T*. Якщо частоти належать спектру (4), то очевидно *N*=*T*. Для встановлення оптимального значення *N* враховуємо поведінку системи поза періодом ідентифікації $[1, N]$. Оскільки статистичні дані на періоді прогнозування $[N+1, t_k]$ нам невідомі, то можна використати відому статистичну інформацію, що передує моменту t_0. Якщо *N* вибране таким, що модельна траєкторія коливань $\varepsilon(t)$ при $t \le 0$ змінюється в напрямку статистичних даних $\varepsilon_t(t=0,-1,...)$, то гіпотеза *N* =*T* підтверджується.

Нехай за допомогою екстраполяції назад, ми ідентифікували період коливань і, отже, встановили оптимальний період ідентифікації [1, *N*]. При цьому нами виділені *n*-1 значущих гармонік, що розповсюджуються у даній системі, і тим самим визначена оптимальна розмірність *n* фазового простору.

Специфікація компонент **x** проводиться при заданому значенні *n*. При поділі множини *x* на підмножини $x_1, x_2, ...,$ x_n необхідно враховувати фізичну сутність цих підмножин та їх значущість у загальній масі. Якщо фазові координати вибрані, то припускаємо, що властиві їм гармонічні коливання налаштовуються на частоти (4).

Модель коливань фазових координат навколо відповідних трендів

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \sum_k (\boldsymbol{a}_k \cos\omega_k t + \boldsymbol{b}_k \sin\omega_k t) \tag{7}$$

екстраполюється назад на проміжок $t \le 0$ і перевіряється відповідність статистичним значенням $\boldsymbol{\varepsilon}_t(t=0, -1, ...)$. Якщо перевірка нас задовольняє, то можуть бути прийнятними і модельні траєкторії руху фазових координат

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{b}}(t-\bar{t}) + \sum_k (\hat{\boldsymbol{a}}_k \cos\omega_k t + \hat{\boldsymbol{b}}_k \sin\omega_k t) \tag{8}$$

Якщо нас не влаштовують імітаційні властивості модельних кривих (7) і (8), то необхідно провести іншу специфікацію фазових координат і переоцінювання відповідних регресійних моделей. Результатом рафінування регресійних моделей (8) і (7) повинна бути також якісна апроксимація статистичних даних $\{x_t\}$ і $\{\varepsilon_t\}$ сумарними траєкторіями $\{x(t)\}$ і $\{\varepsilon(t)\}$, які моделює перший пристрій регулятора згідно першого балансового співвідношення (3).

Специфікація вектора керувань **u** здійснюється при заданому фазовому векторі **x**. Враховуючи фізичну сутність, кожній компоненті x_m ставимо у відповідність керування u_m $(m=\overline{1,n})$. Для ідентифікації вектора керувань $\mathbf{u}(t)$ складаємо регресійну модель:

$$\mathbf{u}_t - \bar{\mathbf{u}} = P(\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}) - B(\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{b}}) + \mathbf{r}_t, \quad t = \overline{1, N}, \tag{9}$$

яку необхідно оцінювати з додатковими обмеженнями на елементи матриць *A* і *B*: з фізичної сутності задачі випливає, що елементи цих матриць додатні.

Адекватність кривих $\mathbf{u}(t)$ статистичним даним перевіряємо за допомогою коефіцієнтів детермінації, а також другого пристрою регулятора, який моделює траєкторію сумарного керування згідно другої балансової рівності (3). Якщо властивості кривих $\mathbf{u}(t)$ нас не влаштовують – розглядаємо заново специфікацію компонент $\mathbf{x}(t)$, скорегувавши поділ заданої множини на підмножини. Ітераційний

процес продовжується доки досліджувана система не налаштується на характерні для неї гармонічні хвилі й, як наслідок, будуть забезпечені високі імітаційні та прогнозні властивості траєкторій фазових координат і керувань, а отже, і системи в цілому.

Практична реалізація алгоритму

Як приклад слабо формалізованої динамічної системи розглянемо макроекономіку Франції [9]. У якості координат фазового вектора **x** виберемо валові випуски секторів, а керувань **u** – кінцеві споживчі витрати на продукцію відповідної галузі. Чисельний експеримент з використанням екстраполяції назад за статистичними даними 1957–1959 рр. дозволив встановити оптимальне значення об'єму вибірки N = 50: 1960–2009 рр. – період ідентифікації, 2010–2011 рр. – період прогнозування. Аналіз показує, що при рівні значущості $\alpha = 0{,}005$ економіку Франції необхідно ділити на 5 секторів. Дослідження показали, що у якості п'яти секторів можна вибрати наступні: 1 – промисловість та сільське господарство; 2 – будівництво та транспорт; 3 – фінансовий сектор і нерухомість; 4 – комунікації та наука; 5 – сфера послуг. Аналіз отриманих результатів свідчить, що ці сектори відтворюють основні тенденції розвитку макроекономіки Франції в цілому.

Аналіз статистичних даних [9] вказує на те, що дана система розвивається циклічно (фази підйому змінюються фазами спаду). Розкладання часових рядів $\{ x_t \}$ на періоді ідентифікації (t = 1, 2, ... ,50) на трендову і періодичну складові підтверджує наявність чотирьох значущих гармонік (k=1, 2, 3, 6).

Оскільки розклад функції випуску на складові містить один тренд і чотири гармоніки, то число секторів n=5. Основним критерієм вибору п'яти секторів є присутність у траєкторіях випусків цих секторів вказаних чотирьох гармонік, причому гармонічні хвилі з іншими періодами повинні бути незначущими, оскільки вони є нехарактерними для макроекономіки Франції.

Параметрична ідентифікація регресійної моделі випусків секторів (8) дала наступні значення коефіцієнтів детермінації R^2 трендів, навколо яких відбуваються коливання в секторах (табл.1).

Таблиця 1

Коефіцієнти детермінації трендів

№ сектора	1	2	3	4	5	$\sum$
R^2	0,7607	0,9668	0,9390	0,8878	0,9262	0,8949

Аналіз табл.1 показує, що для деяких секторів (особливо для сектору промисловості та сільського господарства) і для економіки в цілому коливання випусків навколо відповідного тренду є відчутними. Періодичні складові стають причиною підйому та спаду економіки , а їх взаємодія на певних проміжках часу приводить до кризових явищ в економіці. Тому є актуальним виділення характерних для даної макроекономічної системи гармонічних хвиль і дослідження їх впливу на економічний розвиток країни.

Відзначимо, що гармонічні хвилі взаємодіють з трендом, і це ускладнює їх аналіз. Але, якщо розглядати чистий коливальний процес, то гармоніки ряду Фур'є стають некорельованими, і це спрощує аналіз впливу окремих гармонік на загальний коливальний процес. Частки дисперсій гармонік у загальній дисперсії коливань кожного сектора обчислюються за допомогою коефіцієнтів R^2, значення яких наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Вклад гармонік в коливальний процес

№ сектора	k =1	k =2	k =3	k =6	∑
1	0,0655	0,6617	0,0919	0,0484	0,8675
2	0,2122	0,1429	0,2946	0,1025	0,7522
3	0,0357	0,4528	0,3208	0,0705	0,8798
4	0,6828	0,1612	0,0802	0,0129	0,9371
5	0,8180	–	0,0974	–	0,9154
∑	0,0913	0,4398	0,2066	0,0753	0,8130

Сумарний внесок гармонік в дисперсію коливань випусків секторів становить від 75,22% (2-й сектор) до 93,71% (4-й сектор). Тому регресійні моделі коливань мають якісні апроксимаційні властивості і можна очікувати значущого вкладу в дисперсії випусків і невиробничого споживання. Значення коефіцієнтів детермінації модельних траєкторій випусків подані в табл.3.

Таблиця 3

Якість модельних траєкторій випусків

№ сектора	1	2	3	4	5	∑
R^2	0,9944	0,9951	0,9994	0,9972	0,9988	0,9964

Порівнюючи результати, наведені в табл.1 і табл.3, робимо висновок про суттєвий вплив гармонік на траєкторії випусків секторів (якість модельних траєкторій перевищує 99%). Так, для першого сектору вклад гармонічних хвиль у дисперсію випуску складає більше 23%, а для валового випуску – більше 10%.

Отримані траєкторії випусків і відповідних коливань мають якісні імітаційні та прогнозні властивості, і вони забезпечують такі ж властивості траєкторій ВВП і відповідного коливання. На рис.1 приведені графіки модельних кривих у випадку макроекономіки Франції. Тут точками зображені статистичні дані, а суцільною лінією – траєкторії руху (всі дані обезрозмірено діленням розрахункових значень на відповідні значення у початковому 1960 р.). Порівняння прогнозних значень з реальними даними (дві останні точки, що відповідають 2010 і 2011 рр.) свідчить про високоточні прогнозні властивості побудованих моделей.

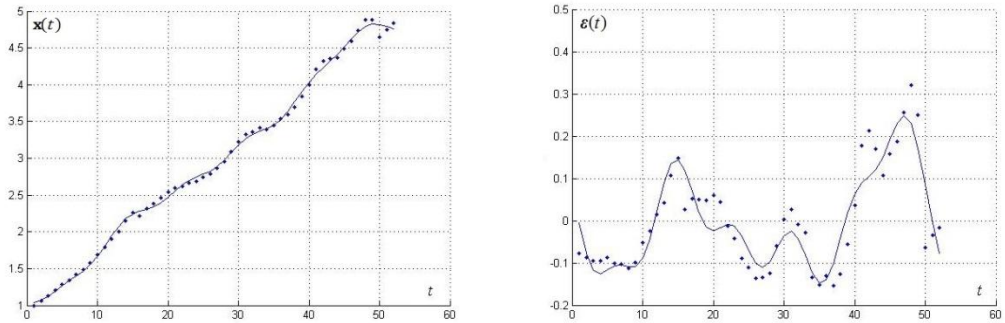


Рис. Модельні траєкторії ВВП та відповідного коливання

Якщо отримані якісні імітаційні та прогнозні властивості траєкторій випусків, то можна тепер оцінювати регресійну модель (9). Параметрична ідентифікація матриць A і B дала наступні результати (табл.4, табл.5).

Таблиця 4

МНК- оцінки елементів матриці *A*

0,2449	0,3539	0,2768	0,3712	0,3293
0,0588	0,0446	0,2389	0,2585	0,2341
0,0663	0,0678	0,3976	0,1399	0,1309
0,0706	0,1937	0,2339	0,2524	0,3006
0,0913	0,0785	0,0026	0,0612	0,7290

Таблиця 5

МНК- оцінки елементів матриці *B*

0,1290	0,1099	0,0996	0,0719	0,1002
0,0367	0,0462	0,0520	0,0536	0,0566
0,0090	0,0220	0,0226	0,0311	0,0140
0,0120	0,0245	0,0413	0,0183	0,0488
0,0215	0,0255	0,0193	0,0498	0,0440

Висновки

У даній роботі запропонований параметричної ідентифікації лінійної стаціонарної моделі слабо формалізованої динамічної системи.

Алгоритм ідентифікації структурних матриць моделі міжгалузевого балансу макроекономічної системи може бути використаний для ефективного розподілу ресурсів при формуванні взаємовідносин між окремими секторами, а також для створення механізму регулювання економічним процесом.

Література

1. Aubin J. P. Dynamic Economic Theory // Springer – Verlag, 1997. 510 p.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний // Изд. 4-е, исправл. – М.: Наука, 2004. – 591с.
3. Leontief W. Input-Output Economics // Oxford University Press, New York, 1986. – 436 p.
4. Greene W. H. Econometric Analysis // – 5th ed. – N.Y.: Pearson Educ. Int., 2003. – 1056 p.
5. Назаренко А.М., Фильченко Д.В. Идентификация и оптимизация слабо формализированных процессов в классе стационарных LQ моделей // Кибернетика и вычислительная техника.– К., 2009. – Вып. 158. – С. 42–61.
6. Назаренко О. М. Побудова та ідентифікація лінійно-квадратичних моделей слабо формалізованих динамічних систем // Вісник ХНУ. Сер. «Матем. моделювання. Інформ. технології. Автом. системи управління». – 2008. Т. 10, № 833. – С. 185-192.
7. Korotayev A.V., Tsirel S.V. Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development // Structure and Dynamics. – 2010. Vol.4. No. 1. – P. 3–57.
8. Назаренко О. М. Основи економетрики // Вид. 2-ге, перероб.: Підручник – Київ: Центр навчальної літератури, 2005. – 392 с.
9. INSEE, [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.bdm.insee.fr/bdm2/index.action.

Стаття надійшла _09_._10_._2014___
Прийнято до друку _04_._11_._2014___

Аннотация

А.М. Назаренко, А.А. Борода

Параметрическая идентификация модели динамического межотраслевого баланса

Рассматривается проблема моделирования и прогнозирования стационарных временных рядов, описывающих слабо формализованные процессы. Предлагается методика спецификации и идентификации линейной стационарной модели в рамках n-мерного фазового пространства на примере динамического межотраслевого баланса реальных макроэкономических систем. Проводится апробация построенных алгоритмов на реальных статистических данных.

Ключевые слова: *линейная стационарная модель, циклические процессы, спецификация, идентификация, прогнозирование.*

Summary

O.M. Nazarenko, A.O. Boroda

Parametric identification of models of dynamical interindustry balance

The problem of modeling and forecasting stationary time series describing weakly formalized processes. The technique specification and identification of linear time-invariant model within the n-dimensional phase space as an example of dynamic input-output balance of real macroeconomic systems. Conducted testing of these algorithms on real statistics.

Key words: *linear stationary model, cyclic processes, specification, identification, prediction.*

УДК 532.529.5:614.838.441 **А.Г. Виноградов, О.М. Яхно**

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КОНУСНОЙ РАСПЫЛЕННОЙ ВОДЯНОЙ СТРУИ

Представлены результаты математического моделирования струй распыленной воды, используемых в качестве водяных завес противопожарного назначения. Главной целью исследования является разработка методики расчета некоторых важнейших параметров распыленных струй конусной формы. К таким параметрам относятся скорости движения капель, их распределение в пространстве, толщина эквивалентного слоя воды. Для разработки математической модели используется теория затопленных струй. Полученные в работе формулы позволяют выполнять расчет названных выше параметров на основе конструктивных характеристик дренчерной установки. Применение этих формул к ранее развитой математической модели теплового экранирования позволило расширить ее возможности для практического использования.

Ключевые слова: *струи распыленной воды, экранирование теплового излучения, противопожарные водяные завесы*.

Введение

Одним из наиболее распространенных средств теплового экранирования при пожаре являются водяные завесы, т.е. струи распыленной воды (СРВ), расположенные таким образом, чтобы защитить людей или материальные ценности от теплового излучения очага пожара. В недавно опубликованных работах [1-4] автор представил математическую модель и разработанную на ее основе расчетную методику для проектирования дренчерных установок, предназначенных для создания защитных водяных завес противопожарного назначения.

При конструировании систем для создания водяных завес наиболее часто используются щелевые оросители, которые создают СРВ в форме плоского веера. В работе [5] разработана ее математическая модель, в основе которой лежит методика, предложенная Г.Н. Абрамовичем при разработке теории затопленных струй [6].

Однако в некоторых случаях для теплового экранирования используются также оросители другого типа, образующие осесимметричные СРВ конусообразной формы. В данной работе названная методика применена с целью получения расчетных формул для противопожарных СРВ этого типа.

Математическая модель

Рассмотрим конусную осесимметричную распыленную струю с начальной скоростью u_0, создаваемую оросителем с выходным отверстием радиусом b_0 (рис. 1). Угол при вершине конуса φ_0 зависит от конструктивных параметров данного оросителя.

Для выполнения расчетов используем соотношения для профилей скорости u и массовой доли воды w_m по произвольному сечению СРВ [6]:

$$u = u_m (1 - \bar{y}^{1,5})^2 \tag{1}$$

,

$$w_m = w_{mm}\left(1-\bar{y}^{1,5}\right), \tag{2}$$

где $\bar{y} = y/b$ – безразмерное расстояние от центральной оси, b – радиус распыленной струи на произвольном расстоянии x от сопла:

$$b = b_0 + x \cdot \tan\frac{\varphi_0}{2} \approx x \cdot \tan\frac{\varphi_0}{2} \tag{3}$$

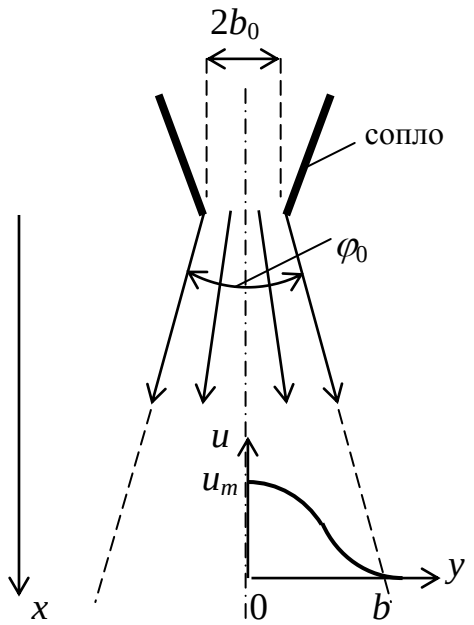


Рис. 1. Схема конусной распыленной струи

На основе законов сохранения импульса и массы получим два уравнения:

$$\rho_w \cdot \pi \cdot b_0^2 \cdot u_0^2 = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^b \rho_s \cdot u^2 \cdot y \cdot dy, \tag{4}$$

$$\rho_w \cdot \pi \cdot b_0^2 \cdot u_0 = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^b \rho_d \cdot u \cdot y \cdot dy, \tag{5}$$

где ρ_s – плотность воздушно-капельной смеси:

$$\rho_s = \rho_a \cdot (1 + w_m), \tag{6}$$

ρ_a – плотность воздуха, ρ_d – плотность распыленной воды:

$$\rho_d = \rho_a \cdot w_m. \tag{7}$$

После подстановки (1), (2), (6), (7) в уравнения (4) и (5), а также с учетом соотношения (3) получим:

$$\rho_w \cdot b_0^2 \cdot u_0^2 = 2 \cdot \rho_a \cdot x^2 \cdot \tan^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot u_m^2 \cdot \left(J_4 + w_{mm} \cdot J_5\right), \tag{8}$$

$$\rho_w \cdot b_0^2 \cdot u_0 = 2 \cdot \rho_a \cdot w_{mm} \cdot x^2 \cdot \varphi_0 \cdot u_m \cdot J_3, \tag{9}$$

где использованы обозначения определенных интегралов:

$$J_3 = \int_0^1 \left(1 - \bar{y}^{1,5}\right)^3 \cdot \bar{y} \cdot d\bar{y} = 0{,}089, \tag{10}$$

$$J_4 = \int_0^1 \left(1 - \bar{y}^{1,5}\right)^4 \cdot \bar{y} \cdot d\bar{y} = 0{,}067, \tag{11}$$

$$J_5 = \int_0^1 \left(1 - \bar{y}^{1,5}\right)^5 \cdot \bar{y} \cdot d\bar{y} = 0{,}053. \tag{12}$$

После расчета числовых коэффициентов найдем из (9):

$$w_{mm} = \frac{5{,}62 \cdot \rho_w \cdot b_0^2 \cdot u_0}{\rho_a \cdot x^2 \cdot \tan^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot u_m}. \tag{13}$$

Подставляя (11) – (13) в (8), после преобразований получим квадратное уравнение относительно u_m:

$$0{,}134 \cdot \rho_a \cdot x^2 \cdot \tan^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot u_m^2 + 0{,}596 \cdot \rho_w \cdot b_0^2 \cdot u_0 \cdot u_m - \rho_w \cdot b_0^2 \cdot u_0^2 = 0.$$

Положительный корень данного уравнения:

$$u_m = \frac{2{,}22 \cdot \rho_w \cdot b_0^2 \cdot u_0}{\rho_a \cdot x^2 \cdot \tan^2 \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1{,}51 \cdot \rho_a \cdot x^2 \cdot \tan^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\rho_w \cdot b_0^2}} - 1 \right). \tag{14}$$

При условии $x \cdot \tan \frac{\varphi_0}{2} > 200 \cdot b_0$ (т.е. $b > 200 \cdot b_0$) и учитывая, что $\rho_a = 1{,}2$ кг/м^3, $\rho_w = 10^3$ кг/м^3, найдем, что дробный член под радикалом значительно больше единицы. В этом случае для достаточно больших x:

$$u_m \approx \frac{2{,}73 \cdot b_0 \cdot u_0}{x \cdot \tan \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho_a}}. \tag{15}$$

В безразмерном виде формулы (14) и (15) имеют следующий вид:

$$\bar{u}_m = \frac{2{,}22 \cdot \rho_w}{\rho_a \cdot \bar{x}^2 \cdot \tan^2 \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1{,}51 \cdot \rho_a \cdot \bar{x}^2 \cdot \tan^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\rho_w}} - 1 \right) \tag{16}$$

$$\bar{u}_m \approx \frac{2{,}73}{\bar{x} \cdot \tan \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho_a}}, \tag{17}$$

где $\bar{x} = x/b_0$; $\bar{u}_m = u_m/u_0$.

Результат расчета графических зависимостей $\bar{u}_m(\bar{x})$ по формулам (16) (пунктир) и (17) (сплошная линия) для двух значений угла φ_0 = 0,5 рад и φ_0 = 1 рад представлен на рис. 2. Сравнивая графики, можно найти, что удовлетворительное (с точностью 20%) соответствие расчетов по формулам (16) и (17) в случае φ_0 = 1 рад имеет место при $\bar{x}$ > 200, а для φ_0 = 0,5 рад – при $\bar{x}$ > 500.

Подставляя (14) в (13), получим зависимость массовой доли воды на оси струи от безразмерного расстояния $\bar{x}$:

$$w_{mm} = \frac{2{,}53}{\left(\sqrt{1 + \frac{1{,}51 \cdot \rho_a \cdot \bar{x}^2 \cdot \tan^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\rho_w}} - 1 \right)}.$$

Используя профиль (2), получим расчетную формулу для массовой доли воды в произвольной точке распыленной струи с безразмерными координатами $\bar{x}$ и $\bar{y}$:

$$w_m = \frac{2{,}53}{\left(\sqrt{1 + \frac{1{,}51 \cdot \rho_a \cdot \bar{x}^2 \cdot \tan^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\rho_w}} - 1 \right)} \cdot \left(1 - \bar{y}^{1{,}5}\right). \tag{18}$$

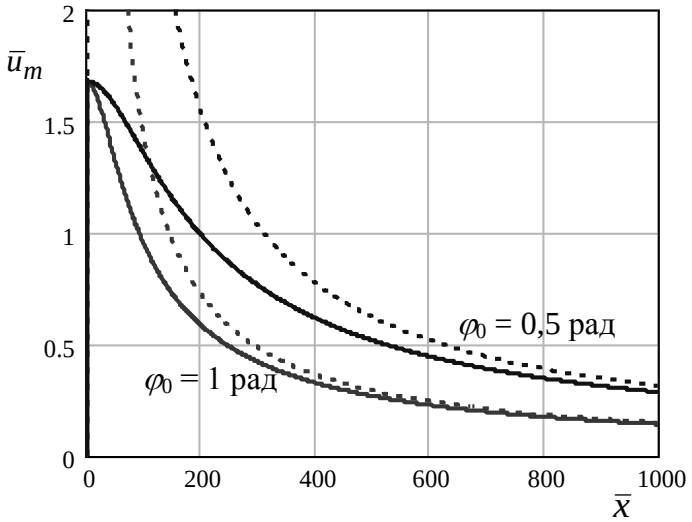


Рис. 2. Расчет зависимостей $\bar{u}_m(\bar{x})$ по формулам (16) (пунктир) и (17) (линия)

Во многих случаях используют не массовую, а объемную долю воды в распыленной струе w_v (суммарный объем капель в единице объема завесы). Связь между этими двумя величинами

$$w_v = w_m \cdot \frac{\rho_a}{\rho_w}, \tag{19}$$

где ρ_w – плотность воды.

С учетом (19), из (18) найдем объемную долю воды в СРВ:

$$w_v = \frac{2{,}53 \cdot \rho_a}{\cdot \rho_w \left(\sqrt{1 + \frac{1{,}51 \cdot \rho_a \cdot \bar{x}^2 \cdot \tan^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\rho_w}} - 1 \right)} \cdot \left(1 - \bar{y}^{1,5}\right). \tag{20}$$

При использовании СРВ в качестве водяных завес большое значение имеет проекция общего количества воды на плоскость водяной завесы (плоскость y = 0), перпендикулярную к направлению теплового излучения пожара. Это так называемая «толщина эквивалентного слоя воды», или, по-другому, толщина водяной пленки, которая образовалась бы, если бы всю воду из капель удалось распределить вдоль этой плоскости. Она равна суммарному объему капель на единицу площади распыленной струи. Для однородного (т.е. при w_v = const) плоского слоя распыленной воды толщиной l:

$$l_{eq} = w_v \cdot l. \tag{21}$$

Для неоднородной струи величина w_v изменяется вдоль y. В этом случае:

$$l_{eq} = 2 \cdot \int_0^b w_v \cdot dy. \tag{22}$$

В отличие от плоской струи, в случае конусной струи говорить о толщине эквивалентного слоя воды достаточно сложно, т.к. она очень сильно зависит от пространственных координат. И все же, если рассматривать экранирующие свойства конусной струи при определенной координате x в области ее наибольшей толщины (напротив осевой линии), такой расчет можно сделать. Используя формулы (22) и (20), получим:

$$l_{eq} = 2 \cdot \frac{2{,}53 \cdot \rho_a \cdot b}{\cdot \rho_w \left(\sqrt{1 + \frac{1{,}51 \cdot \rho_a \cdot \bar{x}^2 \cdot \tan^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\rho_w}} - 1 \right)} \cdot \int_0^1 \left(1 - \bar{y}^{1,5}\right) \cdot d\bar{y}. \tag{23}$$

Выполним расчет определенного интеграла:

$$I_1 = \int_0^1 \left(1 - \bar{y}^{1,5}\right) \cdot d\bar{y} = 0{,}6.$$

Далее из (23) с учетом (3) получим:

$$l_{eq} = \frac{3{,}04 \cdot \rho_a \cdot x \cdot \tan\frac{\varphi_0}{2}}{\cdot \rho_w \left(\sqrt{1 + \frac{1{,}51 \cdot \rho_a \cdot x^2 \cdot \tan^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\rho_w \cdot b_0^2}} - 1 \right)}. \quad (24)$$

При условии $x \cdot \tan\frac{\varphi_0}{2} \gtrsim 100 \cdot b_0$ эту формулу можно упростить:

$$l_{eq} \approx 2{,}5 \cdot b_0 \cdot \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_w}}. \quad (25)$$

Таким образом, в случае одиночной конусной СРВ при достаточно большом удалении от оросителя максимальная толщина эквивалентного слоя воды (напротив оси струи) не зависит от расстояния x и на всем протяжении струи сохраняет постоянное значение, зависящее только от радиуса отверстия оросителя b_0.

Следует заметить, что конусные СРВ не являются оптимальным вариантом для создания защитных водяных завес вследствие большой неоднородности толщины эквивалентного слоя воды по площади завесы. Это обусловлено как чисто геометрическим фактором (формой СРВ), так и неоднородным распределением капель по объему СРВ (см. (2)). Поэтому при проектировании противопожарных водяных завес предпочтение следует отдавать плоским веерным СРВ, которые лишены этого недостатка.

Выводы

Разработана математическая модель струи распыленной воды конусной формы, применяемой для пожаротушения и защиты от тепловых потоков в зоне пожара. Для разработки модели использована методика, применяемая в теории затопленных струй [6]. Получены соотношения для расчета следующих параметров конусной СРВ: осевая скорость (14), массовая доля воды (18), объемная доля воды (20), толщина эквивалентного слоя воды (24). Также получены упрощенные формулы для приближенных расчетов параметров основного участка конусной СРВ.

Перспектива дальнейшего развития данной работы связана с применением полученных результатов для расчета параметров теплового экранирования пожаров.

Литература

1. Виноградов А.Г. Поглощение теплового излучения водяными завесами / А.Г. Виноградов // Пожаровзрывобезопасность. – Москва, 2012. – Т. 21, № 7. – с. 77-86.
2. Виноградов А.Г. Поглощение теплового излучения водяными завесами. Часть 2 / А.Г.Виноградов// Пожаровзрывобезопасность. – Москва, 2013. – Т. 22, № 4. – с. 72-84.
3. Виноградов А.Г. Экранирование теплового излучения полидисперсными водяными завесами / А.Г. Виноградов // Пожаровзрывобезопасность. – Москва, 2013. – Т. 22, № 6. – с. 74-84.
4. Виноградов А.Г. Методика расчета экранирующих свойств водяных завес / А.Г. Виноградов // Пожаровзрывобезопасность. – Москва, 2014. – Т. 23, № 1. – с. 45-56.
5. Виноградов А.Г. Методика розрахунків параметрів водяних завіс на основі теорії затоплених струменів / А.Г. Виноградов // Науковий вісник УкрНДІПБ. – 2013. – № 2 (28). – с. 127-139.
6. Абрамович Г.Н. Теория турбулентных струй / Г.Н. Абрамович. – М.: Гос. издат. физ.-мат. литературы. 1984. – 715 с.

Стаття надійшла _14_._10_._2014___
Прийнято до друку _04_._11_._2014___

Анотація

А.Г. Виноградов, О.М. Яхно

Методика розрахунку гідродинамічних параметрів конусного розпиленого водяного струменя.

Представлені результати математичного моделювання струменів розпиленої води, що використовуються як водяні завіси протипожежного призначення. Головною метою дослідження є розробка методики розрахунку деяких найважливіших параметрів розпилених струменів конусної форми. До таких параметрів відносяться швидкості руху крапель, їх розподіл в просторі, товщина еквівалентного шару води. Для розробки математичної моделі використовується теорія затоплених струменів. Отримані в роботі формули дозволяють виконувати розрахунок названих вище параметрів на основі конструктивних характеристик дренчерної установки. Застосування цих формул до раніше розвиненої математичної моделі теплового екранування дозволило розширити її можливості для практичного використання.

Ключові слова: *струмені розпиленої води, екранування теплового випромінювання, протипожежні водяні завіси.*

Summary

A.G. Vinogradov, O.M. Yakhno

Calculation method of hydrodynamic parameters of the conic sprayed water jet

This work represents the results of mathematical modeling of water sprayes used as fire-prevention curtains. A main goal of research is development of a method of calculation of some major parameters of the sprayed jets of a conic form. These parameters include droplets movement velocities, their space distribution, thickness of the equivalent layer of water. For development of mathematical model the submerged jet theory is used. The formulae received in work allow carrying out calculation of the called parameters on the basis of design characteristics of drencher installation. Application of these formulae to earlier developed mathematical model of thermal shielding allowed expanding its opportunities for practical use.

Key words: *sprayed water jets, heat radiation shielding, fire-prevention water curtains.*

УДК 004.932.2:536.521:681.518:621.791.7 **А.В. Ярмілко**

ОТРИМАННЯ ТА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ПІРОМЕТРИЧНИХ ДАНИХ В ЗАДАЧАХ ДІАГНОСТИКИ ТА УПРАВЛІННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ

Розглянуто особливості діагностики та управління високотемпературними технологічними процесами за даними візуалізації. Обґрунтовано доцільність перетворення кольорового растрового зображення виробничої видової сцени у поле пірометричних даних. Запропоновано вдосконалену математичну модель визначення температурного растру для практичних застосувань. Визначено діагностичні критерії та способи інтерпретації пірометричних даних в задачах управління технологічними процесами зі значними локальними тепловими навантаженнями.

Ключові слова: *технічний зір, растрове зображення, спектральна пірометрія, експрес-діагностика, прийняття рішень, технологічний процес, процеси фізико-технічної обробки.*

Вступ

Підвищення виробничої ефективності та забезпечення якості продукції нерозривно пов’язані із глибиною та оперативністю діагностування станів виробничої системи та гнучкістю управління технологічним процесом. Вимога підвищення продуктивності та зниження собівартості виробництва зумовлює інтенсифікацію проведення технологічних операцій, що проявляється у збільшенні потужності підведення енергії в зону обробки та підвищенні динаміки технологічних перетворень. За такого підходу здійснення контролю якості тільки по завершенні операції в багатьох випадках приводить лише до констатації наявного стану, що часто робить неможливим упередження технологічного браку або економічно недоцільним його виправлення. Проведення оперативного контролю повинне відповідати ряду критеріїв: не чинити впливу на перебіг технологічних операцій, забезпечувати комплексність діагностичних даних, мати добру узгодженість з динамікою та базовими параметрами процесу обробки. Таким критеріям відповідає візуальний канал. Він забезпечує безконтактність отримання первинних даних, гарну апаратну та програмну вбудованість у виробничу систему, створює передумови неперервності контролю технологічних перетворень і оперативності здійснення управління ними. Слід зазначити, що візуальний канал є джерелом вхідних даних систем технічного зору, які вже набули поширення в ряді галузей [1] при здійсненні управління та оперативного контролю якості. Проте їхнє застосування в технологіях фізико-технічної обробки є обмеженим. Причиною є суттєва інформаційна збитковість візуальних даних, яка зумовлює неоднозначність їхнього опису та трактування. Дана обставина обумовлює актуальність отримання нових способів трансформації видових сцен технологічного походження у діагностичні ознаки та параметри управління виробничими процесами.

Метою даної роботи є розробка способів виділення інформаційних ознак для задач діагностики та управління процесами фізико-технічної обробки за даними візуального спостереження технологічної зони. Практична цінність дослідження полягає у підвищенні ефективності управління обробкою, оперативного виявлення відхилень перебігу технологічних операцій та стану обладнання, що забезпечує підвищення ефективності виробництва та позитивно позначається на якості кінцевої продукції.

Об'єктом дослідження є інформаційна технологія технічного зору, а його предметом – методи виділення, обробки та інтерпретації візуальних даних в задачах діагностики та управління.

Постановка задачі

У загальному випадку, діагностика та управління процесами фізико-технічної обробки потребують виділення інформативних ознак, за якими може бути проведена ідентифікація станів виробничої системи та характеру перебігу технологічного процесу. Ефективність як виділення такого виду ознак із даних візуалізації, так і їх інтерпретації значною мірою пов’язана із вирішенням наступних задач даного дослідження:

– виявлення продуктивних підходів щодо візуалізації видових сцен технологічних процесів фізико-технічної обробки;

– визначення способу мінімізації збитковості вхідних даних;

– отримання методу підсилення інформаційних ознак;

– розроблення методу визначення динамічних параметрів обробки за статичними видовими сценами;

– розроблення заходів з мінімізації ресурсних витрат при застосуванні методів візуалізації на актуальних для виробничих систем програмно-апаратних платформах.

Підходи до візуалізації процесів фізико-технічної обробки

Виходячи із завдань діагностики та управління виробничими процесами, слід виділити ряд основних вимог до візуалізації зони обробки, а саме: забезпечення високого рівня інформативності та достовірності, а також простоти реалізації виділення ознак і параметрів процесу; мінімізації прояву паразитних артефактів, візуальних спотворень, завад та шумів; забезпечення безперервності та стабільності збору даних. На практиці належна якість візуалізації досягається за рахунок вдалого підбору таких параметрів, як ракурсу, спектральних діапазонів, часу та періодичності ведення спостереження, характеру підсвітки та масштабування зони обробки. В цілому, ефективність проведення візуалізації процесів обробки слід пов’язувати з комплексним урахуванням властивостей апаратно-програмного, метрологічного і методологічного забезпечення, що являє собою складну задачу.

Недостатній рівень формалізації технологічних процесів потребує проведення окремих досліджень, спрямованих на визначення оптимальних підходів до їхньої візуалізації. Це завдання в рамках даної роботи вирішувалося методами натурного моделювання, а також шляхом аналізу синтезованих зображень, отриманих методам чисельного та імітаційного моделювання. В якості базових технологічних процесів обрано зварювання та лазерну розмірну обробку, які є типовими представниками фізико-технічних методів.

На рис. 1 представлено отримані у результаті натурних досліджень дані візуалізації перебігу процесу лазерного різання конструкційної сталі на технологічній установці виробництва INEX systems (м. Черкаси) з імпульсним трьохквантронним АІГ-лазером потужністю 500 Вт. Кадри зображення отримано за допомогою монохромної камери Basler piA640-210gm з світлофільтром BP 850 (інфрачервоний діапазон) для моментів часу дії лазерного випромінювання (рис. 1а) та паузи між технологічними імпульсами (рис. 1б) при частоті 80 Гц.

Рис. 1 Варіація візуальних ефектів лазерної розмірної обробки

Аналіз зображення, яке представлено на рис. 1а, демонструє складність візуальної обстановки у зоні спостереження. Крім світлової плями п. 1, на зображені є ряд інших візуальних артефактів, зокрема треки іскор п. 2, утворених в результаті згорання у повітряному потоці продувки диспергованих часток матеріалу, відблиски від поверхні заготовки та технологічного оснащення п. 3, паразитні ефекти оптичного тракту п. 4, утворені прозорим захисним екраном технологічної камери та об'єктивом відеосенсора. Окремо слід звернути увагу на структуру світлової плями. Вона має яскраво виражену центральну та суттєво розмиту периферійну частини. Центральна зона плями обмежена нерівномірним по формі контуром, що зумовлено різною щільністю і температурою продуктів газової ерозії, високим заломленням вторинного випромінювання у зоні взаємодії лазерного променя з матеріалом заготовки. Нестаціонарність процесів обробки спричиняє значну динаміку зміни як розмірів, так і форми світлової плями.

Зазначені обставини вкрай ускладнюють задачу виділення інформаційних ознак технологічного процесу за візуальними даними. Хоча більшість фрагментів зображення і несуть в собі інформацію про перебіг процесу обробки, але їх доцільно сприймати як елементи збитковості даних візуалізації в контексті дослідження конкретного фізико-технічного процесу. На відміну від рис. 1а, на зображенні рис. 1б такі прояви мінімізовано. Це зумовлено тим, що при припиненні підведення енергії в зону обробки єдиним джерелом світла стає зона термічного впливу п. 5, оскільки процеси теплопровідності та конвекційних втрат тепла мають значну інерційність, а рівень випромінювання розжареної ділянки, згідно закону Стефана-Больцмана, становить $I \sim T^4$ і є суттєвим за величиною. Недолік такого типу візуалізації полягає у критично низькому рівні інформативності. Так, за зображенням рис. 1б можливо визначити лише наближені параметри процесу, оскільки розміри зони п. 5 становлять 10..50 пікселів.

З аналізу отриманих натурних зображень можливо зробити ряд висновків та сформувати наступні підходи до візуалізації технологічних процесів:

1. Характер перетворень об'єкту технологічного впливу у процесах фізико-технічної обробки має виразні візуальні прояви, зумовлені високим рівнем потужності потоку енергії, яка подається в область технологічного перетворення.

2. Внаслідок перерозподілу підведеної енергії у оброблюваному матеріалі утворюється теплове поле, причому фізичні рівні прояву теплових ефектів, як правило, є достатніми для формування інформативного сигналу в оптичному діапазоні та поза ним.

3. Високий ступінь локалізації енергії та виражений температурний прояв процесів фізико-технічної обробки надає незаперечні аргументи на користь дослідження температурного поля з метою виявлення ознак для забезпечення контролю якості та організації управління.

4. З метою мінімізації завад, фіксацію візуальних даних доцільно проводити у моменти мінімального прояву всіх збурень, крім температурних (наприклад, у паузах між імпульсами технологічного впливу).

5. Бажано, щоб актуальна для діагностики зона температурного впливу займала не менше п'ятої частини зображення.

6. Слід надавати перевагу багатоканальним візуальним даним, що дозволить ефективніше виділяти інформаційні ознаки та визначати їх параметри завдяки роздільної обробки складових зображення та співставлення отриманих результатів.

Отримання поля температур за даними візуалізації процесу обробки

Сучасні цифрові відеосенсори мають гарні експлуатаційні характеристики і дозволяють отримувати багатоканальне растрове зображення в широкому спектрі випромінювання – від ультрафіолетового до ближнього інфрачервоного. За необхідності можливо формувати візуальні дані шляхом комбінованого використання декількох сенсорів, що дозволяє значно розширити діапазон спостереження як у бік більш жорсткого ультрафіолету, так і в сторону дальнього інфрачервоного. Проте при виборі як відеосенсорів, так і способу обробки вхідних даних у випадку формування поля температури за даними візуалізації фізико-технічних процесів слід виходити з наступних міркувань.

Як відомо, в цілому енергетичні та спектральні характеристики абсолютно чорного тіла залежать лише від температури і описуються законами Планка, Релея-Джинса, Віна та Стефана-Больцмана. Однак їх пряме застосування для визначення температури супроводжується значною похибкою, зумовленою варіацією коефіцієнта направленого теплового випромінювання (КНТВ – «рівень чорноти») поверхні чи зони розплаву заготовки в межах 0,1..0,9. З цієї причини у випадках, коли відсутні реальні дані про КНТВ, використовують методи спектральної пірометрії [2-5]. Основне обмеження цих методів полягає у зниженні верхньої межі температур до рівня 4000 ºС, що обумовлено переходом до області Віна внаслідок необхідності спрощення обчислень. Дане обмеження є прийнятним для випадку перетворення візуальних даних більшості технологічних процесів, в тому числі – процесів фізико-технічної обробки. Незважаючи на те, що температура в зоні дії енергетичного чинника може становити 20 000..50 000 ºС, внаслідок високої інтенсивності випромінювання $I \sim T^4$ та високої швидкості адіабатичного розширення утвореної плазми вже за $\approx 10^{-5}$ с температура в зоні обробки спаде до температури розплаву (для сталі – звичайно не більше 1500 ºС).

Модель Віна, згідно [4], за відомою інтенсивністю випромінювання на двох ділянках спектру, наприклад, зеленого та червоного каналу з довжиною хвилі λ_g та λ_r відповідно, дозволяє визначити температуру за формулою:

$$T_c = \frac{C_2}{\Lambda \ln((I_g / I_r)(\lambda_g / \lambda_r)^5)}, \qquad (1)$$

де Λ – величина еквівалентної довжини хвилі для вимірювання спектральної температури, яка вираховується за формулою $\Lambda = \lambda_g \cdot \lambda_r / (\lambda_g - \lambda_r))$.

Вираз (1) можливо спростити виходячи з того, що значення довжин хвиль λ_g та λ_r можливо знайти за розподілом спектральної чутливості конкретної відеокамери:

$$T_c = \frac{C_3}{\ln(C_4 \cdot I_g / I_r)} \quad (2)$$

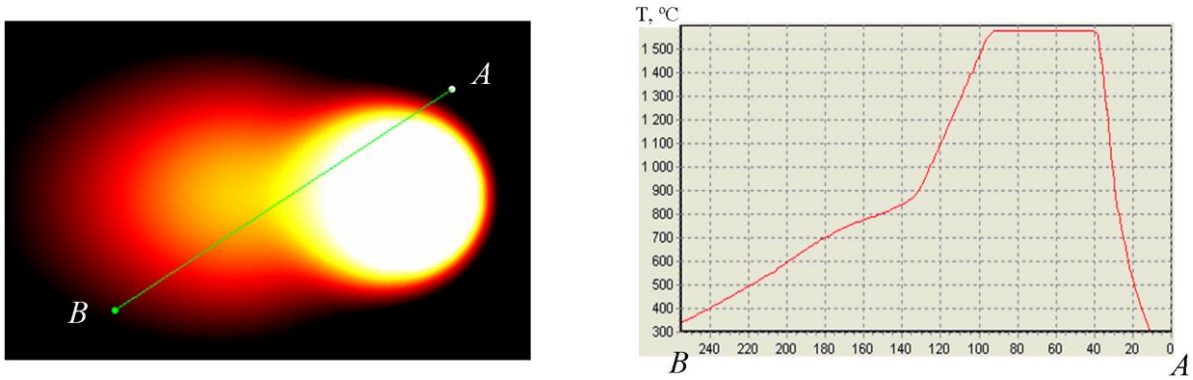
Перетворення кольорового растрового зображення видової сцени в поле температур за (2) ускладнене операціями множення, ділення і знаходження логарифма. З метою спрощення обчислень, шляхом варіацій змінних I_r і I_g був створений масив із 25 значень температур, з якого чисельними методами отримана регресійна залежність:

$$T_c = 370 + I_r^{'} + 1{,}25 \cdot I_g^{'} + 2.8 \cdot I_b^{'}, \quad (3)$$

де $I_r^{'}$, $I_g^{'}$, $I_b^{'}$ – значення яскравості за червоним, зеленим та синім каналами відеокамери. Маркер «штрих» вказує, що яскравість не є істинною інтенсивністю випромінювання окремого каналу, а лише її аналогом, оскільки насправді значення $I_x^{'}$ пропорційне фотоструму та є інтегральною величиною в межах спектральної смуги. Необхідність введення параметра $I_b^{'}$ зумовлено накладанням суміжних спектральних пелюсток чутливості відеокамери. Отримана залежність (3) справедлива для таких матеріалів, як конструкційні та леговані сталі, чавун. Незважаючи на певну обмеженість, даний перелік охоплює переважну більшість використовуваних у типових технологіях фізико-технічної обробки матеріалів.

Точність визначення температури для обробки зазначених матеріалів за виразом (3) в діапазоні 600..1500 ºС в середньому становить ±15 ºС. Однак такої точності можливо очікувати лише за умови калібрування відеокамери. Дана проблема зумовлена розкидом характеристик камер та неможливістю забезпечення абсолютної стабільності процесу їх виготовлення. Калібрування відеокамери проводять шляхом співставлення температури, отриманої методом спектральної пірометрії, з температурою поверхні, яка визначена еталонним пірометром. Усунення відхилення проводиться шляхом проведення корекції їх оптичних характеристик виконанням гамма-корекції та балансу білого.

Обчислення за виразом (3) дозволяють визначати за сформованим внаслідок теплових процесів зображенням значення температур у довільних точках зони спостереження та отримувати їхні технологічно значимі параметри. На рис. 2 представлено результати обробки модельного кольорового растрового зображення технологічної зони процесу імпульсного зварювання сталі (рис. 2а) при формуванні температурного профілю *AB* (рис. 2б). Як видно, метод має обмеження щодо визначення температурних показників в області з критично низькими значеннями яскравості I_r, I_g та I_b за відповідними спектральними каналами (околиця точки *A*), проте у сталі теплові рівні таких ділянок, як правило, не викликають основних або супутніх технологічних перетворень.



а) б)

Рис. 2 Визначення температурного профілю за даними спектральної пірометрії

Моделі трансформації зображення видової сцени у множину ознак

Високий рівень спотворень та інформаційна збитковість отриманого сигналу висуває додаткові вимоги до вибору таких математичних моделей трансформації даних візуалізації, які б забезпечували отримання адекватних оцінок об'єкта спостереження за умови допустимого рівня ресурсних затрат на підтримання цього процесу.

Виділення інформаційних ознак, які забезпечують ефективний синтез керуючих та діагностичних рішень, передбачає здійснення ряду перетворень наступного змісту. В загальному випадку вхідні дані відеоспостереження відповідають простору $V \subseteq m \cdot N^2$, де m – розмірність простору, оскільки сучасні відеосенсори дозволяють підтримувати багатоканальний режим, який забезпечує фіксацію спектральних складових видимого (RGB-модель) та/або інфрачервоного (IR) діапазону. У ряді випадків розмірність простору розширюють за рахунок композиції сигналів від сенсорів декількох типів, які охоплюють ультрафіолетовий, рентгенівський діапазони і навіть потік вторинних електронів, однак таке розширення опису вхідного сигналу у контексті пірометрії не актуальне. В подальшому розгляді простір відеоданих буде обмежено видимим діапазоном, що задовольняє потребам управління та діагностування фізико-технічних процесів обробки. Такий підхід дозволяє розглядати простір відеоданих як композицію підпросторів $R \subseteq V$, $G \subseteq V$ і $B \subseteq V$ за спектральними складовими сигналу відеосенсора.

Зниження збитковості відеоданих пропонується виконати шляхом трансформації простору $\boldsymbol{V}$ у простір температур $\boldsymbol{T}$:

$$f(RGB): V \to T, \tag{4}$$

де $f(RGB)$ – функція перетворення кольорового растрового зображення в поле температур, в якості якої доцільно використовувати вираз (3), при цьому слід приводити значення температур в цілочисельний вигляд, що дозволить сформувати простір $T \in N^2$. Розміри простору температур будуть визначатися роздільною здатністю $K \times M$ конкретного відеосенсору, де K – кількість пікселів по вертикалі, а M – по горизонталі.

В загальному випадку простір $\boldsymbol{T}$ містить декілька областей $\{P_z\}$, z=1..Z, які можуть трактуватися як інформативні і описуються виділеними за деякими критеріями Q_z множинами точок температурного растру $t \in T \mid Q_z$. При цьому окремі області $\boldsymbol{P_g}$ і $\boldsymbol{P_h}$, $\{g,h\} \in z$, можуть бути як незалежними ($P_g \cap P_h = \varnothing$), так і вкладеними ($P_g \subseteq P_h$).

Такі області, в свою чергу, мають трансформуватися у множину ознак $\boldsymbol{O_z}$, на основі яких формуються діагностичні чи управляючі рішення. Задача розділення окремих областей з множини $\{P_z\}$, яка може бути актуальною для випадку значної часової та просторової нерівномірності підводу енергії в зону обробки або значної анізотропії теплофізичних властивостей матеріалу, в межах даної статті не розглядається.

Розглянемо випадок наявності в області формування видової сцени лише однієї області ознак технологічного процесу ***P***. Нехай ця інформативна область характеризується межами за її крайніми точками по вертикалі: $n = \min(y)$ і $m = \max(y)$, – та по горизонталі: $k = \min(x)$ і $l = \max(x)$, які відповідають лініям растру по координатам X та Y.

Всю множину ***P*** слід сприймати як ізотропну, оскільки виділення області з простору ***T*** здійснювалось за прийнятим критерієм ***Q***, який не передбачає диференціацію її елементів. У технологічних задачах для проведення діагностики та синтезу управляючих рішень часто більш цінними є не окремі елементи множини ***P***, а її геометрична форма та параметри положення, які можуть бути визначеними за множиною точок обмежуючого контуру $D = \{d_f\}$ цієї області. Перелічені характеристики у даному випадку будуть складати множину візуальних ознак технологічного процесу ***O***. Операція виділення контуру ***D*** має вигляд трансформації $D = FrP = \overline{P} \setminus \operatorname{int} P$. Дана операція являє собою третій рівень зниження збитковості початкових відеоданих ***V***.

Подальше зниження збитковості можливо досягнути шляхом параметризації множини ***D*** за ознаками форми та положення за наближеними моделями: прямокутна, кругла, еліпсоїдна, краплеподібна область і т.п. Обчислення зазначених параметрів проводиться шляхом статистичної обробки множини ***D*** з подальшою класифікацією за ознакою найбільшої подібності з урахуванням того, що положення кожної точки контуру визначається координатами $d_f = (x_f, y_f)$.

Доцільно на початковому етапі параметризації визначити координати центра ваги $C=(X_c,\ Y_c)$ області ***P*** за точками контуру ***D***, використавши для цього значення статичного моменту інерції.

Визначення статичного моменту інерції варто проводити роздільно по осям:

$$X_c = \frac{1}{S} \cdot \sum_{j=n}^{m} (x_j^- - x_j^+) \cdot (x_j^+ + (x_j^- - x_j^+)/2),$$
$$Y_c = \frac{1}{S} \cdot \sum_{j=n}^{m} (x_j^- - x_j^+) \cdot y_j \qquad (5)$$

де S – нормована площа, яка обчислюється за формулою $S = \sum_{j=n}^{m} (x_j^- - x_j^+)$, x_j^+ та x_j^- – координати точок входження у область та виходу із неї, які виділяються за усередненими температурами базису за критеріями швидкості зміни температури $\partial T / \partial x > \Delta T_{out}$ і $\partial T / \partial x < \Delta T_{in}$ відповідно.

Параметр приведеного радіусу R області ***P*** знаходиться за значенням площі температурної області:

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \qquad (6)$$

Даний параметр є зручним для опису динаміки процесу фізико-технічних перетворень та оцінки кількості підведеної в зону обробки енергії.

Використання еліпсоподібних моделей і, як їхнього розширення – краплеподібних моделей, – є доцільним для встановлення характеристик розвитку процесу технологічних перетворень, у яких відбувається переміщення точки підведення енергетичного впливу відносно оброблюваного матеріалу. Алгоритм побудови та аналізу моделей такого типу має наступний вигляд. За множиною точок обмежуючого контуру $D = \{ d_f \}$ виділеної області ***P*** встановлюються базові точки еліпсу, за якими визначаються елементи еліпсу та виконується його побудова.

Виділення уявної осі симетрії зручно проводити за зміною радіус-вектора ρ, що потребує переходу з декартової в полярну систему координат. Аналогом такого переходу є розгортка контуру, на якій кожній точці d_f ставиться у відповідність значення ρ_f:

$$\rho_f = \sqrt{(x_f - X_c)^2 + (y_f - Y_c)^2} \tag{7}$$

За даними розгортки знаходяться глобальний максимум A_0 із множини радіус-векторів. Дана операція здійснюється шляхом аналізу локальних максимумів розгортки A_w, які знаходяться за різницевою схемою:

$$A_0 = Arg \max(A_w), \tag{8}$$

де $A_w = \rho_f$, якщо $\begin{cases} \rho_f - \rho_{f-1} > 0 \\ \rho_{f+1} - \rho_f < 0 \end{cases}$.

Знайдені положення центра мас та точки глобального максимуму контуру визначають лінію осьової симетрії області ***P***.

Зазначимо, що при наявності більше ніж однієї точки глобального максимуму контуру (наприклад, для випадку форми контуру зони температурного впливу у вигляді кола, що спостерігається при підведення енергії до заготовки без здійснення її переміщення відносно джерела енергії) використання моделі типу еліпс втрачає сенс.

Для визначення точки перетину A_1 уявної вісі симетрії з протилежної сторони по відношенні до положення точки глобального максимуму необхідно здійснити перебір усіх точок контуру ***D*** за виключенням точок околу A_0 за критерієм найменшої відстані до прямої (A_0, C).

Прив'язка уявної осі симетрії (A_0, A_1) дозволяє розбити область ***P*** на підмножини P_a і P_b, причому $P_a \cap P_b = \varnothing$. Послідовно визначаючи довжини горизонтальних відрізків кожної із областей P_a і P_b, можливо отримати значення оцінки площі областей S_a і S_b. Цінність цих оцінок полягає в тому, що при первинному аналізі даних візуалізації значення $\varepsilon = S_a / S_b$ може характеризувати рівень симетрії області ***P***.

Отже, приведена послідовність трансформації зображення видової сцени дозволяє отримати достатньо широку множину візуальних ознак технологічного процесу, серед яких ознаки форми, статистичні, точкові, контурні, сегментаційні та остовні ознаки.

Інтерпретація результатів обробки даних растрової пірометрії

Трактування результатів оброби пірометричних даних доцільно провести з прив'язкою до вхідних даних візуалізації, що реалізовано у вигляді проекції зображення видової сцени процесу неперервного зварювання, приведеної на рис. 3. Маркерами круглої форми помічено множину точок контурів, кожний із яких обмежує область певного діапазону температур за критерієм $T_i < T_P < T_{max}$, де T_p – температура довільної точки з простору $\boldsymbol{T}$, а T_i – значення температури, обране за критерій селекції. Так, контур п. 1 відображає область точок, температура у яких більша за 550 ºС, контур п. 2 – 750 ºС, а контур п. 3 – 1000 ºС.

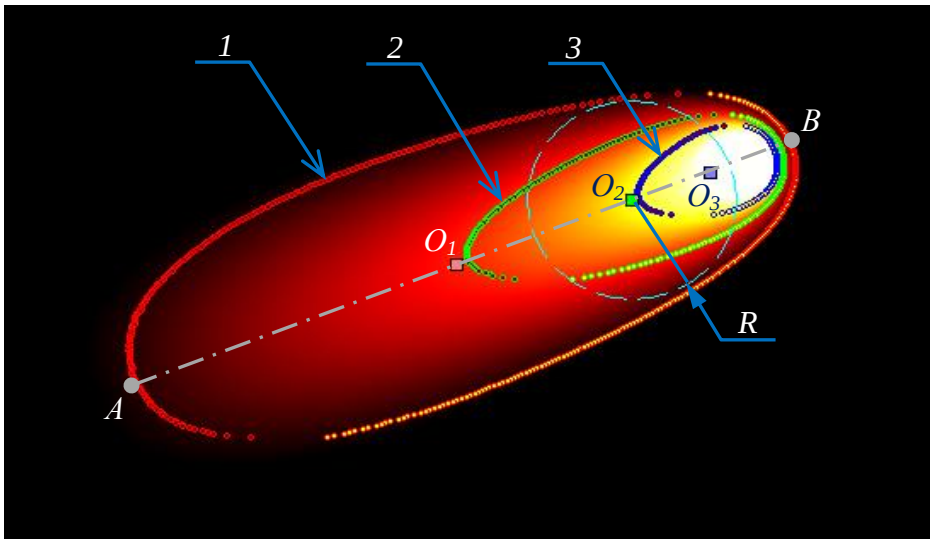


Рис. 3 Результати цифрової обробки даних растрової пірометрії

Форма контуру п. 1 відповідає моделі типу еліпс, для нього виділена велика вісь *AB* та центр ваги O_1. Контури п. 2 та п. 3 класифікуються як об'єкти краплеподібної форми. Як видно, центра ваги O_3 області п. 3 не співпадає з центром підводу енергії. Дана обставина засвідчує необхідність обережного підходу при вибори діапазону температур для виділення області та трактуванні отриманих ознак візуалізації.

Рознесення центрів O_1, O_2 і O_3, які характеризують положення зон з різними температурними рівнями, можна інтерпретувати як прояв просторової динаміки процесу підводу енергії, за яким, враховуючи час затримки між окремими кадрами, можливо визначити напрям та швидкість переміщення джерела технологічного впливу.

Іншу форму оцінки динаміки процесу обробки надає аналіз співвідношення площ фігур, обмежених виділеними контурами, оскільки вони відображають енергетичні та часові параметри енергетичного впливу. При цьому раціональним кроком є мінімізація опису геометрії використовуваної моделі шляхом переходу від натуралістичних до приведених аналітичних моделей. Прикладом такого підходу є опис краплеподібної області п. 2 з центром ваги O_2 концентричним колом радіусу *R*. Додатковою перевагою запропонованого методу є можливість діагностування характеру перерозподілу теплової енергії у межах світлової плями за розмірами, формою та взаємним положенням окремих температурних зон.

Висновки

Проведене дослідження засвідчило високий потенціал пірометричних даних як джерела інформативних ознак для організації діагностування та управління фізико-технічними методами обробки. Встановлено, що обмеження температурного діапазону для типових процесів фізико-технічної обробки робить можливим спрощення існуючих моделей спектральних пірометричних вимірювань [2-5] шляхом використання регресійної залежності (3). Запропонований метод забезпечує прийнятну точність вимірювань у діапазоні 600..1500 °С при використанні відеокамер видимого діапазону, що у більшості випадків охоплює мінімальні теплові рівні, які можуть викликати структурні перетворення матеріалу, появу тріщин та інших технологічних дефектів. При наявності візуальних даних ближнього інфрачервоного діапазону випромінювання, нижня межа може бути зміщеною до рівня 250 °С, що дозволяє не обмежувати область застосування запропонованої методики лише високотемпературними процесами.

Раціональним кроком щодо підвищення ефективності та достовірності методів виділення ознак технологічного процесу за його температурними проявами слід вважати фіксацію візуальних даних в паузах між імпульсами технологічного впливу із затримкою, величина якої повинна перевищувати час релаксації всіх збурень, крім температурних, та технологічно допустиму мінімізацію розмірів зони спостереження. Важливим є також забезпечення багатоканальності візуальних даних, що підвищує ефективність виділення інформаційних ознак та визначення їх параметрів завдяки роздільної обробки складових зображення та співставлення отриманих результатів.

В цілому проведене дослідження підтвердило можливість за даними растрової пірометрії виділяти широкий набір інформаційних ознак, які дозволять встановити статичні та динамічні параметри перебігу технологічного процесу. Запропоновані заходи зі зменшення інформаційної збитковості та спрощення моделей візуалізації забезпечують зниження обчислювальної складності та мінімізацію ресурсних витрат при виділенні візуальних ознак, що створює хороші передумови для їхньої комп'ютерної підтримки на базі вбудованих систем реального часу. Отримані переваги актуальні для управління і діагностики таких високодинамічних фізико-технічних процесів, як лазерна, плазмова, газо-плазмова обробка, електронно-променеве та електрозварювання.

Література

7. Computer vision [Електронний документ] / [Edited by Xiong Zhihui]. – Rijeka, Croatia: In-teh, 2008. – 538 p. – Режим доступу: www.intechweb.org
8. Магунов А. Н. Измерение температуры объектов с неизвестной излучательной способностью методом спектральной пирометрии / А. Магунов // Научное приборостроение. – 2010. – Т. 20, № 3. – С. 22 – 26.
9. Сеньков А. Г. Трехспектральная пирометрия металлов на основе современных трехцветных многоэлементных фотоприемников / А. Г. Сеньков, В. А. Фираго // Вестник БГУ. – Сер. 1. – 2007. – № 1. – С. 54 – 61.
10. Моделирование двухцветного пирометра со световодным трактом для металлургических печей / [Е. И. Марукович, Л. Ф. Жуков, Ю. Н. Кочкин и др.]. // Литье и металлургия. – 2010. – № 3 (56). – С. 48-58.
11. Тымкул В. М. Математическая модель работы пирометра двойного отношения [Електронний документ] / В. М. Тымкул, Ю. А. Фесько // ИНТЕРЭКСПО ГЕО-СИБИРЬ. – 2007. – Т. 4, № 2. – Режим доступу: http://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskaya-model-raboty-pirometra-dvoynogo-otnosheniya

Стаття надійшла _17_._10_._2014___
Прийнято до друку _07_._11_._2014___

Аннотация

А. В. Ярмилко

Получение и интерпретация пирометрических данных в задачах диагностики и управления технологическими процессами.

Рассмотрены особенности диагностики и управления высокотемпературными технологическими процессами по данным визуализации. Дано обоснование целесообразности преобразования цветного растрового изображения производственной видовой сцены в поле пирометрических данных. Предложена усовершенствованная математическая модель определения температурного растра для практических применений. Определены диагностические критерии и способы интерпретации пирометрических данных в задачах управления технологическими процессами со значительными локальными тепловыми нагрузками.

Ключевые слова: *техническое зрение, растровое изображение, спектральная пирометрия, эспресс-диагностика, принятие решений, технологический процесс, процессы физико-технической обработки.*

Summary

A. V. Yarmilko

Obtaining and interpretation of the pyrometric data for the problem of diagnostics and controlling of the technological processes

In the article features of the imaging-based diagnosis and controlling of the high-temperature processes are considered. The expediency of converting the color bitmap images of the production scenes to the form of the pyrometric data field was substantiated. The improved mathematical model of the thermal raster field definition for practical applications was proposed. The diagnostic criteria and methods of pyrometric data interpretation for the tasks of controlling the processes with significant local thermal loads have been established.

Key words: *technical vision, bitmap image, spectral pyrometry, rapid diagnosis, decision making process, engineering process, processes of physics-technical treatment.*

УДК 629.4.017 **А.А. Гнатовская**

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАИМЕНЬШЕЙ ВЕЛИЧИНЫ ИНТЕНСИВНОСТИ ОТКАЗОВ ДВУХКАСКАДНЫХ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

Проанализирована математическая модель зависимости показателей надежности от отношения количества термоэлементов в каскадах термоэлектрического устройства. Определена зависимость относительной величины интенсивности отказов от соотношения термоэлементов в каскадах для различных перепадов температур, которая позволяет проектировать двухкаскадные термоэлектрические устройства по условию, обеспечивающему наименьшую интенсивность отказа.

Ключевые слова*: моделирование, надежность, термоэлектрические устройства, проектирование, теплонагруженные элементы.*

Введение

Критические системы составляют класс информационных систем, выход из строя или некорректное функционирование которых приводит к техническим, экологическим последствиям, связанных с пожарами, взрывами, распространением химических веществ в воздухе и воде, человеческими жертвами. Надежность таких систем является их важной интегративной характеристикой, а проектирование предусматривает надежностно-ориентированный подход. Постоянное усложнение таких систем и увеличение количества составляющих элементов приводит к уменьшению надежности, поскольку вероятность выхода из строя каждого элемента меньше единицы. Это противоречие является фундаментальным, поскольку проектируется надежная система из компонентов с ограниченным уровнем надежности [1]. Распределение надежности подсистем в информационной системе неоднородно. Некоторые подсистемы находятся в более критических условиях и существенно влияют на надежность всей системы, поэтому при проектировании требуют особого внимания [2].

Постановка задачи

Разработка и применение математических моделей проектирования каскадных термоэлектрических устройств с приоритетом по надежности является одним из важнейших направлений, позволяющих проектировать теплонагруженные электронные компоненты систем.

Параметрические методы повышения надежности являются определяющими при проектировании теплонагруженных элементов критических систем [3]. Термоэлектрические устройства представляют наиболее надежный тип охладителей, выполняются по полупроводниковой технологии, не имеют движущихся частей. Но интенсивность выхода из строя таких теплонагруженных компонентов значительно превышает интенсивность отказов при паспортных условиях эксплуатации за счет зависимости отказов от тепловой нагрузки [4]. Каскадные термоэлектрические устройства более эффективны, чем однокаскадные, а их использование для критических режимов работы требуют тщательного анализа с позиций надежности [5].

Задачей является разработка математической модели взаимосвязи показателей надежности и основных параметров каскадных термоэлектрических устройств, ее надежностно-ориентированный анализ в системах автоматизированного проектирования критических систем.

Основная часть

Применение каскадных термоэлектрических устройств (КТЭУ) в радиоэлектронной аппаратуре обусловлено не только обеспечением более глубокого охлаждения по сравнению с однокаскадными ТЭУ, но и повышением энергетической эффективности охлаждения. При проведении проектирования каскадного ТЭУ производится выбор стандартных модулей и компоновка элементов каскадного ТЭУ, которая удовлетворяет массогабаритным характеристикам в соответствии с техническим заданием. При этом необходимо на стадии проектирования количественно оценить показатели надежности.

Для решения поставленной задачи использовалась математическая модель взаимосвязи показателей надежности и основных параметров проектируемого каскадного ТЭУ, которая позволяет получать количественные оценки [6]. Использованная модель позволяет осуществлять выбор режимов работы КТЭУ, которые соответствуют наименьшей величине интенсивности отказов и наибольшей вероятности безотказной работы. При этом необходимо в заданном интервале температур и тепловой нагрузке произвести выбор конструкции каскадного ТЭУ с прогнозируемыми показателями надежности для различных условий эксплуатации и определить режим работы каскадного ТЭУ, соответствующий наименьшей величине интенсивности отказов. Следующие соотношения использованы для определения основных параметров КТЭУ [6]:

Общий перепад температур на двухкаскадном ТЭУ:

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \Delta T_{\max 1}\,\Theta_1 + \Delta T_{\max 2}\,\Theta_2\,,$$

где ΔT_1, ΔT_2 – перепад температур соответственно в «холодном» и «горячем» каскадах (далее первом и втором каскадах), *К*;

$\Delta T_{\max 1}$, $\Delta T_{\max 2}$ – максимальный перепад температур соответственно в первом и втором каскадах, К;

Относительные перепады температур в каскадах определяются зависимостью:

$$\Theta_1 = \frac{\Delta T_1}{\Delta T_{\max 1}}\,,\ \Theta_2 = \frac{\Delta T_2}{\Delta T_{\max 2}}$$

Холодопроизводительность Q_0 двухкаскадного ТЭУ определяется соотношением:

$$Q_o = n_1 I_{\max 1}^2 R_1 \left(2B_1 - B_1^2 - \Theta_1\right),$$

где n_1 – количество термоэлементов, *шт.*;

$I_{\max 1} = \dfrac{e_1 T_o}{R_1}$ – максимальный рабочий ток, *А*;

R_1 – электрическое сопротивление ветви термоэлемента, *Ом*;

$B_1 = \dfrac{I}{I_{\max 1}}$ – относительный рабочий ток, *отн. ед.*

При последовательном электрическом соединении каскадов должно соблюдаться условие равенства рабочих токов в каскадах $I_{\max 1} B_1 = I_{\max 2} B_2$,

где $B_2 = \dfrac{I}{I_{\max 2}}$ – относительный рабочий ток, *отн. ед.*;

$I_{\max 2} = \dfrac{e_2 T_1}{R_2}$ – максимальный рабочий ток, *А*.

Из условия теплового сопряжения каскадов отношение количества термоэлементов в смежных каскадах можно записать в виде:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{I_{\max 1}^2 R_1}{I_{\max 2}^2 R_2} \frac{\left[2B_1\left(1+\dfrac{\Delta T_{\max 1}}{T_0}\Theta_1\right)+B_1^2-\Theta_1\right]}{\left(2B_2-B_2^2-\Theta_2\right)}$$

Относительную величину интенсивности отказов каскадного ТЭУ можно представить в виде суммы интенсивностей отказов каждого каскада

$$\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_0} = \frac{n_1 B_1^2 K_{T_1}\left(\Delta T_1 / \Delta T_{\max 1} + C_1\right)\left(\Delta T_1 / T_0 + B_1\right)^2}{\left(1+\Delta T_1 / T_0\right)^2} + \frac{n_2 B_2^2 K_{T_2}\left(\Delta T_2 / \Delta T_{\max 2} + C_2\right)\left(\Delta T_2 / T_1 + B_2\right)^2}{\left(1+\Delta T_2 / T_1\right)^2}, \quad (1)$$

где λ_0 – номинальная интенсивность отказов, 1/ч; $\lambda_0 = 3\cdot 10^{-8}$ *1/час*; n_1, n_2 – количество термоэлементов в каскадах, *шт*; (индексы *1* и *2 соответствуют* “холодному” и “горячему” каскадам); B_1 и B_2 – относительный рабочий ток в каждом каскаде, *отн., ед*.

В результате проведенных расчетов по предложенной модели исследованы зависимости относительных рабочих токов B_1 и B_2 от отношения количества термоэлементов в каскадах n_1/n_2. (рис.1).

Выявлено, что с уменьшением количества термоэлементов в каскадах величины относительных рабочих токов уменьшаются при исследованных перепадах температур. С ростом перепадов температур величина относительного рабочего тока в каскадах увеличивается при заданном отношении количества термоэлементов в каскадах (рис. 1).

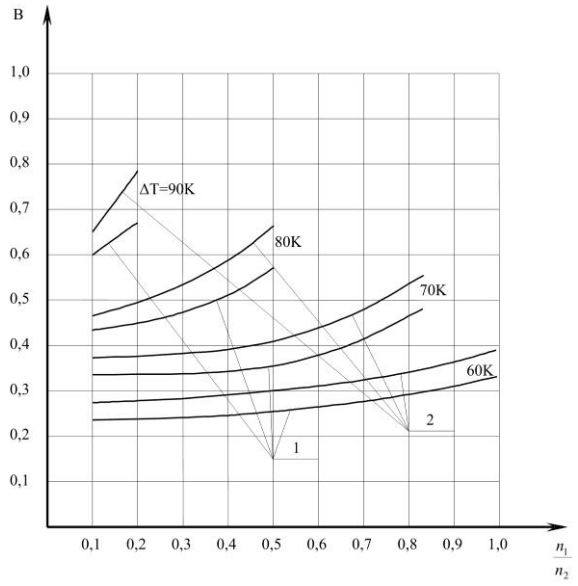


Рис. 1. Зависимость относительного рабочего тока в каскадах B_1 и B_2 двух-каскадного ТЭУ от отношения количества термоэлементов в смежных каскадах n_1/n_2 при $T = 300\,K$, $Q_O = 0{,}1\,Вт$ и перепадах температур ΔT = 60 К; 70 К; 80 К; 90 К, где *1* – B_1; *2* – B_2

Исследованы зависимости относительного перепада температур Θ_1 и Θ_2 от отношения количества термоэлементов в каскадах (рис.2)

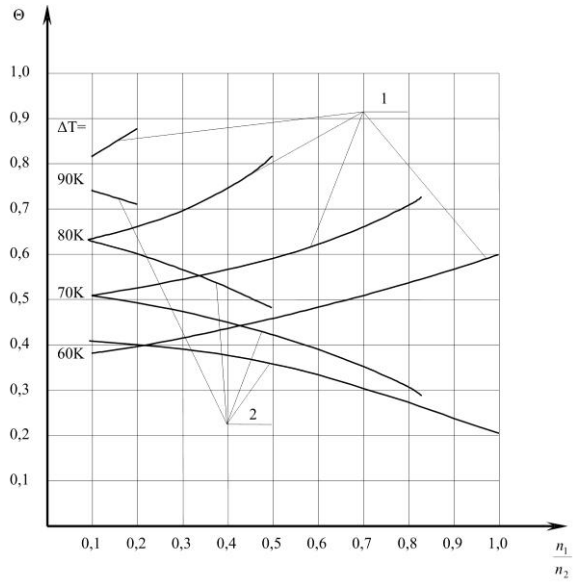


Рис.2. Зависимость относительного перепада температур Θ_1 и Θ_2 двухкаскадного ТЭУ от отношения количества термоэлементов в смежных каскадах n_1/n_2 при $T = 300\,K$, $Q_O = 0{,}1\,Вт$ и перепадах температур ΔT = 60 К; 70 К; 80 К; 90 К, где *1* – Θ_1; *2* – Θ_2

В результате выявлено, что с ростом общего перепада температур ΔT величина относительных перепадов температур увеличивается при заданных значениях

отношения количества термоэлементов в каскадах двухкаскадного термоэлектрического устройства (рис. 2).

Исследована зависимость относительной величины интенсивности отказов двухкаскадного термоэлектрического устройства от отношения количества термоэлементов в смежных каскадах (рис. 3). Произведена оценка влияния распределения количества термоэлементов в каскадах ТЭУ на показатели надежности в широком диапазоне температур с учетом тепловой нагрузки.

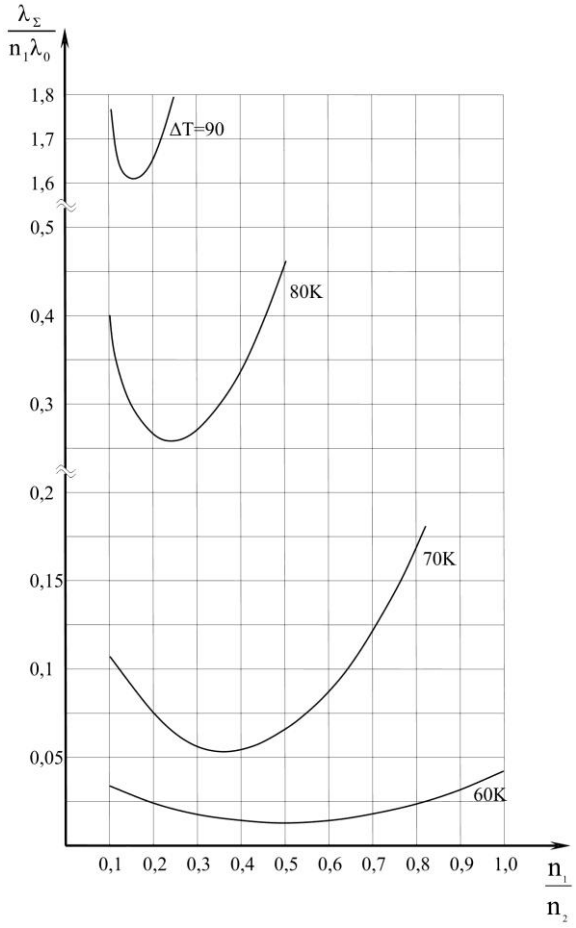


Рис.3. Зависимости относительной величины интенсивности отказов $\frac{\lambda_\Sigma}{n_1\lambda_0}$ двухкаскадного ТЭУ от отношения количества термоэлементов в смежных каскадах n_1/n_2 при $T = 300K$, $Q_O = 0{,}1\,Вт$ и перепадах температур ΔT = 60 К; 70 К; 80 К; 90 К

Анализ зависимости позволил утверждать, что характерной особенностью зависимости $\frac{\lambda_\Sigma}{n_1\lambda_0} = f\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$ (рис. 3) является наличие минимума функции $\frac{\lambda_\Sigma}{n_1\lambda_0}$ при соответствующих значениях n_1/n_2 для различных перепадов температур ΔT.

С ростом перепада температур ΔT величина $\left(\frac{\lambda_\Sigma}{n_1\lambda_0}\right)_{\min}$ увеличивается и смещается в сторону меньших значений n_1/n_2. Соотношение $\frac{\lambda_\Sigma}{n_1\lambda_0}$ носит обобщенный характер и может использоваться для расчетов при любом значении величины n_1.

Обработка информации, представленной на рисунке 3, направлена на получение зависимости минимальных значений относительной величины интенсивности отказов $\left(\frac{\lambda_\Sigma}{n_1\lambda_0}\right)_{\min}$ от отношения количества термоэлементов в смежных каскадах n_1/n_2 и от перепадов температур ΔT (рис. 4).

Для вычисления значений функции вне области, ограниченной заданными точками, использованы методы экстраполяции.

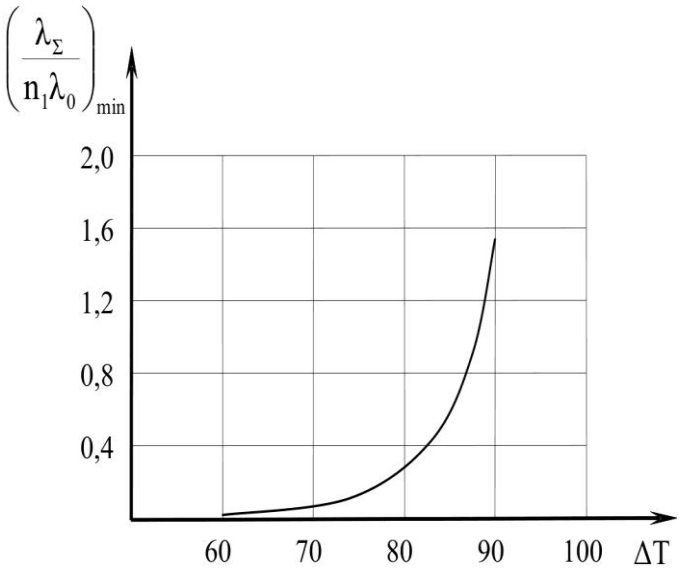


Рис. 4. Зависимость минимальной величины относительной интенсивности отказов $\left(\frac{\lambda_\Sigma}{n_1\lambda_0}\right)_{\min}$ двухкаскадного ТЭУ от перепада температур

При нахождении зависимости минимальной величины относительной интенсивности отказов $\left(\frac{\lambda_\Sigma}{n_1\lambda_0}\right)_{\min}$ двухкаскадного ТЭУ от отношения количества термоэлементов в смежных каскадах n_1/n_2 принято $T = 300\,K$, $Q_O = 0{,}1\,Вт$ и перепады температур ΔT = 60 К; 70 К; 80 К; 90 К (рис. 5).

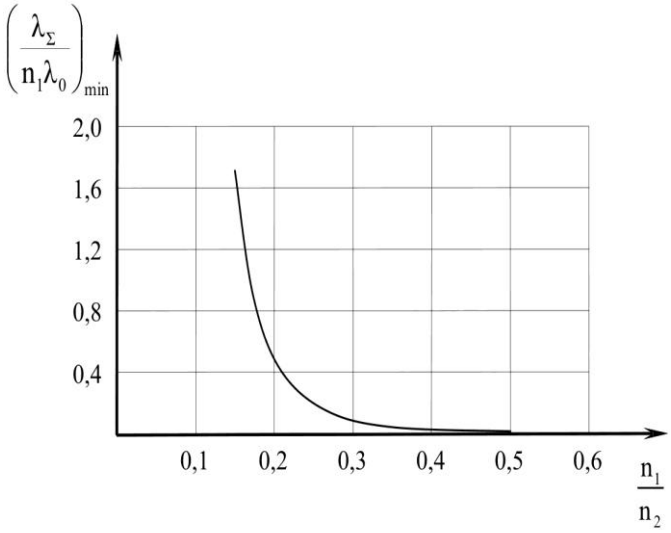


Рис. 5. Зависимость минимальной величины относительной интенсивности отка-зов $\left(\frac{\lambda_\Sigma}{n_1\lambda_0}\right)_{min}$ двухкаскадного ТЭУ от отношения элементов в каскадах n_1/n_2

Определена зависимость минимальной величины относительной интенсивности отказов $\left(\frac{\lambda_\Sigma}{n_1\lambda_0}\right)_{min}$ двухкаскадного термоэлектрического устройства как от отношения термоэлементов в каскадах n_1/n_2 , так и от перепада температур ΔT (рис. 6).

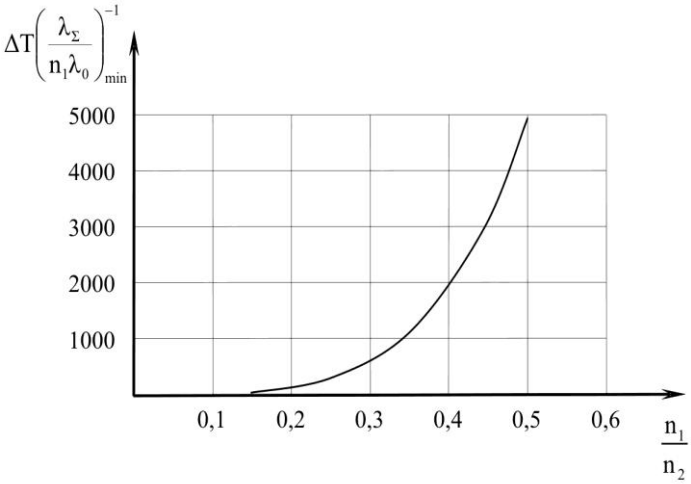


Рис. 6. Зависимость минимальной величины относительной интенсивности отказов $\left(\frac{\lambda_\Sigma}{n_1\lambda_0}\right)_{min}$ двухкаскадного ТЭУ от отношения термоэлементов в каскадах $(n_1/n_2)_{min}$ и перепада температур ΔT .

В результате проведенных исследований математической модели взаимосвязи основных параметров каскадных термоэлектрических устройств, выявлена связь между

минимальными значениями относительной интенсивности отказов $\left(\frac{\lambda_\Sigma}{n_1\lambda_0}\right)_{\min}$ и отношениями термоэлементов в каскадах $(n_1/n_2)_{\min}$ при соответствующих им перепадами температур ΔT, которая описывается аналитической зависимостью:

$$\Delta T\left(\frac{\lambda_\Sigma}{n_1\lambda_0}\right)_{\min}^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)_{\min}^{-3,755} = 6,56\cdot 10^4, \qquad (2)$$

где $(n_1/n_2)_{\min} = 5,61e^{-0,04\Delta T}$ – отношение термоэлементов в каскадах, соответствующее минимуму относительной интенсивности отказов при заданном перепаде температур ΔT.

Экстремумы полученной зависимости интенсивности отказов от распределения термоэлементов в каскадах для различных значений температурного перепада, описываются аналитической зависимостью, что позволяет проектировать каскадные термоэлектрические устройства по условию минимума интенсивности отказов.

Выводы

Проведен анализ зависимости относительной интенсивности отказов от соотношения термоэлементов в каскадах для различных перепадов температур. Показано что минимумы зависимости $\frac{\lambda_\Sigma}{n_1\lambda_0} = f\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$ интенсивности отказов от соотношения распределения элементов в каскадах при различных значениях перепада температур, описываются аналитической зависимостью, которая позволяет проектировать двухкаскадные термоэлектрические устройства по условию, обеспечивающему наименьшую интенсивность отказа.

При выборе соотношения термоэлементов двухкаскадного ТЭУ целесообразно ориентироваться на ту конструкцию, которая бы обеспечивала минимальную интенсивность отказов при заданном перепаде температур и тепловой нагрузке.

Стаття надійшла _21_._10_._2014___
Прийнято до друку _04_._11_._2014___

Литература

1. Соммервилл, И. Инженерия программного обеспечения [Текст] / И. Соммервилл. – М.: Вильямс, 2002. – 624 с.
2. Воскобоев, В.Ф. Надежность технических систем и техногенный риск. Часть 1. Надежность технических систем (учебное пособие). [Текст] / М. : ООО ИД «Альянс», ООО изд-во «Путь», 2008. – 204 с.
3. Обеспечение тепловых режимов изделий электронной техники [Текст] / А. А. Чернышёв, В. И. Иванов, А. И. Аксенов, Д. Н. Глушакова. – М.: Энергия, 1980. – 216 с.
4. Система отвода теплоты от теплонагруженных элементов РЭА на основе пульсационной тепловой трубы / Е.С. Алексеик, В.Ю. Кравец // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. — 2013. — № 1. — С. 19-24.
5. Зайков, В. П. Прогнозирование показателей надежности термоэлектрических охлаждающих устройств [Текст]. Книга 1. Однокаскадные устройства / В. П. Зайков, Л. А. Киншова, В. Ф. Моисеев – Одесса : ”Политехпериодика”, 2009. – 120 с.

6. Гнатовская, А.А. Обеспечение наименьшей интенсивности отказов термоэлектрического устройства заданной конструкции / А.А. Гнатовская, В.П. Зайков, В.И. Мещеряков // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», – 2011. – № 23. – С. 76 – 86.

Анотація

Г.А. Гнатовська

Математична модель найменшої величини інтенсивності відмов двокаскадних термоелектричних пристроїв

Для отримання моделі найменшої величини інтенсивності відмов двокаскадних термоелектричних пристроїв досліджена поведінка залежності відносної величини інтенсивності відмов від відношення кількості термоелементів у каскадах. Проведені дослідження виявило наявність мінімуму функції відносної величини інтенсивності відмов при відповідних значеннях відношення термоелементів у каскадах для різних перепадів температур, яка описується отриманою аналітичною залежністю. Залежність дозволяє здійснювати проектування двокаскадних *термоелектричних пристроїв за умовою, що забезпечує найменшу інтенсивність відмов.*

Ключові слова: *моделювання, надійність, термоелектричні пристрої, проектування, теплонавантажені елементи*

Summary

A.A. Gnatovskaya

Mathematical model of the smallest value of the failure rate of two-stage thermoelectric devices

For the model the smallest value of the failure rate of two-stage thermoelectric devices studied the behavior of the relative magnitude of the failure rate of the ratio of the number of thermocouples in the cascades. Studies have revealed the presence of minimum of the relative magnitude of the failure rate for the corresponding values of thermocouples in relation to different stages of changes in temperature, which describes the preparation of analytical dependence. Dependence allows to design two-stage thermoelectric devices for conditions that ensure the lowest failure rate.

Key words: *modeling, reliability, thermoelectric devices, design, heat-loaded elements*

УДК 533.63, 534.23 **Петр В. Лукьянов**

ВЛИЯНИЕ ПРИСОЕДИНЕННОГО КОНЦЕВОГО ВИХРЯ ЛОПАСТИ РОТОРА ВЕРТОЛЕТА НА ГЕНЕРАЦИЮ BVI-ШУМА

В работе в трёхмерной нестационарной постановке, с учётом граничного условия на торцах лопасти ротора вертолёта, поставлена и решена задача генерации шума взаимодействия лопасти и вихрей (BVI-шум). Для её решения предварительно были получены выражения для компонент индуктивной скорости течения, генерируемого вихрём Скули, расположенным на внешнем конце вращающейся лопасти. Общая задача разделена на две части: аэродинамическую и акустическую. Аэродинамическая часть задачи представляет собой замкнутую систему уравнений Эйлера и неразрывности для баротропного газа. Акустическая часть задачи состоит из системы двух уравнений для звукового потенциала и пульсаций плотности. Обе части задачи решались численно с помощью численно-аналитического метода. Выполнен сравнительный анализ результатов численного расчёта данной задачи с аналогичной задачей без учёта концевых вихрей. В частности обнаружено, что наличие концевых вихрей в модели делает шум преимущественно шумом вихревого характера, поэтому ниже по уровню шума в отсутствие концевых вихрей. При этом характерная для него частота 700Гц выражена более отчётливо.

Ключевые слова: *модель концевого вихря, генерация BVI-шума лопастью ротора вертолёта.*

Введение

До сих пор моделирование шума взаимодействия лопасти вертолёта и вихря выполнялось с использованием разного рода приближений, не учитывающих присутствие на конце лопасти присоединённого вихря. Граничное условие на конце лопасти ($z = R$) не задавалось или же заменялось условием проскальзывания потока. И это оправдано для сравнительно больших значений чисел Маха ($M > 0.5$) и удлинённых лопастей: индуктивное течение попросту не успевает сформироваться, так как его сметает набегающий поток. Однако, если ставить задачу более корректно, то на конце лопасти нужно задавать несколько иное физическое граничное условие, поскольку там происходит зарождение присоединённого вихря.

Анализ существующей литературы в области вихревой динамики роторов вертолёта показал, что сегодня наиболее часто используемым приближением для моделирования скорости индуктивного вихревого течения на конце лопасти является формула Био-Савара-Лапласа [1]:

$$\bar{v} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \int \frac{\bar{r} \times d\bar{s}}{r^3} \tag{1}$$

В выражении (1) Γ - циркуляция скорости в вихре. На основе этой формулы получено выражение для компонент индуктивной скорости u, w в следующем виде:

$$u = -\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h}{y^2 + h^2}, \quad w = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{y}{y^2 + h^2} \tag{2}$$

Однако отметим, что формула (1) выведена для задачи в стационарной постановке. Следовательно, и выражения (2) отображают стационарный случай

формирования индуктивного течения. Более того, как указано выше, в нестационарной задаче это течение успевает сформироваться лишь вблизи конца лопасти: набегающий на лопасть поток, при достаточно больших скоростях, не позволяет замкнуть линии тока лопасти от её конца до комля (у оси вращения) в виду малого промежутка времени обтекания лопасти потоком. Отчётливое формирование вихря заметно лишь на конце лопасти. Нетрудно понять, что речь идёт о вихрях, индуцируемых в продольном направлении: скорость и траектория движения частиц жидкости расположены вдоль лопасти, а завихренность ($rot\bar{V}$) направлена вдоль по направлению набегающего на лопасть потока. Иначе говоря, это продольные вихри, формирующиеся в виде дорожки Кармана за лопастью вместе с уходящим потоком. Но эти вихри, как известно в акустике, имеют квадрупольную природу с малой энергией шума по сравнению с шумом, формирующимся непосредственно на поверхности лопасти.

Вернёмся, однако, к присоединённому вихрю, формирующемуся на конце лопасти. Экспериментальные исследования показали, что наиболее близкой математической моделью, описывающей присоединённый концевой вихрь, является модель Скулли [2]:

$$\gamma = \Gamma \cdot \frac{r^2}{r^2 + r_c^2} \qquad (3).$$

Она уже использовалась для моделирования динамики ротора вертолёта при изучении шума взаимодействия лопасти ротора и вихря [3].

Итак, будем полагать, что на конце лопасти формируется поперечный вихрь Скулли, индуцируемый течением вокруг концевой части лопасти. Его присутствие на конце лопасти восполнит недостающее граничное условие (по скоростям), которое теперь уже позволяет рассматривать задачу для конечной лопасти более корректно. Что же касается акустической части задачи, то более точный учёт индуктивного течения в области конца лопасти даёт возможность изучить влияние концевого вихря на формирование шума взаимодействия лопасть-вихрь.

До сих пор речь шла об уточнении формулировки задачи аэродинамики на внешнем, удалённом от оси вращения, конце лопасти. Хотелось бы акцентировать внимание ещё на одном моменте. Вихрь Скулли не компактен: после достаточно быстрого достижения максимума на границе ядра вихря амплитуда окружной скорости в вихре плавно убывает на бесконечность. На противоположном же конце лопасти (у оси вращения ротора) формируется комлевой вихрь. Но он достаточно слаб и диффундирован, что позволяет использовать в первом приближении распределение убывающего вихря Скулли также и для описания комлевой завихренности. Действительно, ряд известных на сегодня некомпактных вихрей (например, вихри Рэнкина и Ватистасса) на удалении порядка $r_c = 4.0$ от центра вихря, которым вполне можно считать комлевую часть лопасти, имеют такое же, как и в вихре Скулли, распределение скорости. Потому для удалённой от центра вихря области любой из перечисленных вихрей, в том числе и вихрь Скулли, подходит для моделирования комлевой завихренности течения.

Предварительные расчётные соотношения

Приведенные выше выражения для компонент индуктивной скорости (2) получены для случая расположения вихря вдоль оси Ox при $y = 0$ [1]. Однако в задачах аэроакустики часто начало системы координат располагают у оси вращения лопасти, а не на её конце. Поэтому выведем соотношения для компонент скорости

v, w,считая, что концевой вихрь расположен при $y = R$, (рис.1). Используем тот же подход, что приведен у Джонсона при выводе (2).

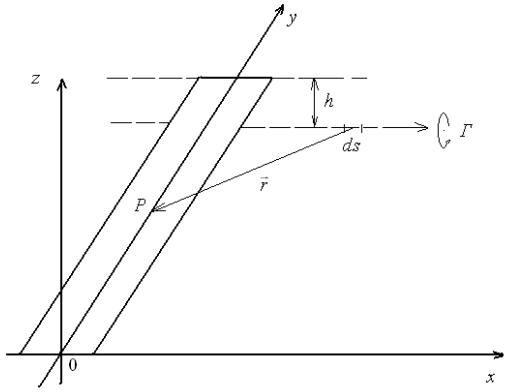


Рис.1. К выводу формул (4),(5).

Радиус-вектор произвольной точки P на поверхности лопасти в данной системе координат имеет следующий вид: $\bar{r} = -x\bar{i} - (R-y)\bar{j} + h\bar{k}$, где x, y – текущие координаты, h, R- расстояние от оси вихря до плоскости лопасти и радиус лопасти соответственно. Учитывая $d\bar{s} = \bar{i}dx$ [1], на основании формулы (1) получим выражение для вектора индуктивной скорости:

$$\bar{v} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h\bar{j} + (R-y)\bar{k}}{(R-y)^2 + h^2}, \tag{4}$$

где, $w = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{R-y}{(R-y)^2 + h^2}$, $u = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h}{(R-y)^2 + h^2}$- нормальная к поверхности лопасти и радиальная (вдоль размаха лопасти) компоненты скорости соответственно. Однако, в действительности среда вязкая, поэтому вихрь на самом деле имеет ненулевой конечный радиус r_c, который был учтен [2] в виде дополнительной добавки r_c^2 в знаменателе (3). На основании сказанного выражение для вектора индуктивной скорости (4) примет вид:

$$\bar{v} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h\bar{j} + (R-y)\bar{k}}{(R-y)^2 + h^2 + r_c^2} \tag{5},$$

а

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{(R-y)\bar{k}}{(R-y)^2 + h^2 + r_c^2}, u = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{h\bar{j}}{(R-y)^2 + h^2 + r_c^2}.$$

Таким образом, соотношения (5) описывают компоненты индуктивной скорости, которые используем в качестве не только граничного условия на конце лопасти $y = R$, но и для коррекции при численном расчёте нестационарных компонент полной скорости обтекания лопасти потоком.

Заметим, что при выводе выражений (4),(5) предполагалось, что расстояние от вихря до поверхности лопасти h везде одинаковое, то есть фактически лопасть считалась достаточно тонкой и её толщиной пренебрегли. Если же необходимо учесть

форму поперечного сечения лопасти, то есть изменение расстояния до лопасти с учётом её искривления $h = h(x)$,то везде нужно значения h заменить на выражение $h(x)$.Однако, в таком случае скорость из выражения (1) аналитически не всегда можно выразить, поскольку для этого требуется вычислить следующий интеграл:

$$\bar{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x)\bar{j} + (R-y)\bar{k}}{(R-y)^2 + h^2(x) + r_c^{\,2}} dx \tag{6}$$

Ввиду того, что модель представления концевого вихря вихрём Скулли также является приближённой, принятой на основании близкого совпадения её с экспериментальными данными, вариацию $h(x)$ при расчёте индуктивной скорости в данной работе не будем принимать во внимание, поскольку лопасть тонкая. При этом на основании формулы (6) в знаменателе получим точность второго порядка малости, а в числителе – первого порядка малости. Таким образом, поперечная к лопасти компонента скорости w, непосредственно ответственная за генерацию звука взаимодействия лопасти с потоком, вычисляется с точностью до величины второго порядка малости. Продольная же компонента скорости u вдоль размаха лопасти при этом будет определяться с точностью до величины первого порядка малости – разности расстояния от поверхности лопасти до её хорды. Такое приближение допустимо, поскольку в продольном направлении звук при взаимодействии лопасти и потока не генерируется, так как частицы воздуха в рамках рассматриваемой в данной работе модели идеальной сжимаемой среды просто скользят без трения вдоль лопасти. Распространению же *звуковой волны*, генерируемой в поперечном направлении, ничего не мешает во всех направлениях, в том числе и продольном направлении. Если всё же в будущем окажется принципиально важным учёт вариации формы конца лопасти, тогда придется воспользоваться выражением (6).

Постановка задачи

Пусть имеется лопасть прямоугольной формы вдоль размаха, параболической формы в поперечном сечении (рис.2). На внешнем от оси вращения конце ($z = R$) лопасти расположен присоединённый вихрь Скулли, распределение поля скорости которого захватывает и ближний к оси вращения конец лопасти $z = 0$. На переднюю кромку лопасти набегает поток из бесконечности со скоростью U. Необходимо выполнить расчёт компонент поля скорости и плотности, на основании которых произвести расчёт шума, генерируемого взаимодействием лопасть-вихрь.

Аэродинамическая часть

Система уравнений, описывающая течение идеальной сжимаемой жидкости вокруг лопасти, в безразмерной форме имеет следующий вид [4]:

$$\frac{\partial u'}{\partial \tau} + u'\frac{\partial u'}{\partial \xi} + \lambda c v'\frac{\partial u'}{\partial \eta} + \frac{c}{AR} w'\frac{\partial u'}{\partial \zeta} = -\frac{1}{M^2 \rho'}\frac{\partial \rho'}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial v'}{\partial \tau} + u'\frac{\partial v'}{\partial \xi} + \lambda c v'\frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{1}{AR} w'\frac{\partial u'}{\partial \zeta} = -\frac{\lambda c}{M^2 \rho'}\frac{\partial \rho'}{\partial \eta};$$

(7)

$$\frac{\partial w'}{\partial \tau}+u'\frac{\partial w'}{\partial \xi}+\lambda c v'\frac{\partial w'}{\partial \eta}+\frac{1}{AR}w'\frac{\partial w'}{\partial \zeta}=-\frac{1}{M^2 AR\rho'}\frac{\partial \rho'}{\partial \zeta};$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \tau}+\frac{\partial(\rho' u')}{\partial \xi}+\lambda c\frac{\partial(\rho' v')}{\partial \eta}+\frac{1}{AR}\frac{\partial(\rho' w')}{\partial \zeta}=0;$$

где $\xi = x/c, \eta = y\lambda, \zeta = z/R, \tau = kt, u' = u/U_\infty, v' = v/U_\infty, w' = w/U_\infty;$
$p = p'\rho_\infty U_\infty{}^2, \rho = \rho_\infty \rho', c, \lambda, R$ - длина хорды лопасти, толщинный параметр, радиус лопасти соответственно, M - число Маха, $AR = R/c$ (“aspect ratio”).

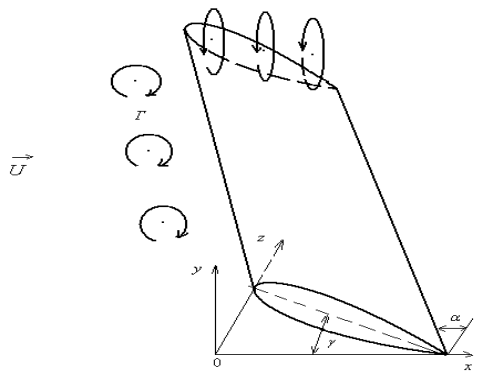


Рис.2. Обтекание лопасти потоком с учётом концевого вихря.

Первые три уравнения системы (7) представляют собой уравнения движения идеальной сжимаемой жидкости Эйлера без учёта массовых сил. Четвёртое уравнение – уравнение неразрывности среды.

Лопасть считается жёсткой, недеформируемой, а на её поверхности задаётся граничное условие непроницания:

$$\bar{V}_n\Big|_{\Gamma}=0 \tag{8}$$

Акустическая часть

Для формулировки аэродинамической части задачи нам необходимо знать параметры течения. После определения компонент скорости и плотности, в результате решения задачи аэродинамики (7)-(8), можно сформулировать следующую акустическую задачу [4]:

$$\frac{\partial^2\bar{\rho}'}{\partial\tau^2}-\frac{1}{M_\infty^2}\cdot\frac{\partial^2\bar{\rho}'}{\partial\xi^2}-a^2(\lambda^2c^2\cdot\frac{\partial^2\bar{\rho}'}{\partial\eta^2}+\frac{1}{AR^2}\cdot\frac{\partial^2\bar{\rho}'}{\partial\zeta^2})+R(\bar{\rho}',\frac{\partial\bar{\rho}'}{\partial\xi},\frac{\partial\bar{\rho}'}{\partial\eta},\frac{\partial\bar{\rho}'}{\partial\zeta},\frac{\partial^2\bar{\rho}'}{\partial\xi^2},\frac{\partial^2\bar{\rho}'}{\partial\eta\partial\xi},...,\frac{\partial^2\bar{\rho}'}{\partial\zeta^2})=$$
$$\gamma(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\xi},\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\eta},\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\zeta},\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\xi^2},\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\eta\partial\xi},...,\frac{\partial^3\bar{\varphi}}{\partial\zeta^3}); \tag{9}$$

а,

$$\bar{\rho}(\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\xi^2}+c^2\lambda^2\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\eta^2}+\frac{1}{AR^2}\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\zeta^2})+c\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\xi}+c^2\lambda^2\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\eta}+\frac{1}{AR^2}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\zeta}=-\Big[c\frac{\partial\rho'}{\partial\tau}+$$
$$\bar{\rho}'(c\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}+\lambda c^2\frac{\partial\bar{v}}{\partial\eta}+\frac{c^2}{R}\cdot\frac{\partial\bar{w}}{\partial\zeta})+c\bar{u}\frac{\partial\bar{\rho}'}{\partial\xi}+\lambda c^2\bar{v}\frac{\partial\bar{\rho}'}{\partial\eta}+\frac{c^2}{R}\bar{w}\frac{\partial\bar{\rho}'}{\partial\zeta}\Big] \tag{10}$$

где $\bar{\varphi}, \bar{\rho}'$ - безразмерный звуковой потенциал и плотность. Выражение $R(\bar{\rho}', \frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial \eta}, \frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial \zeta}, \frac{\partial^2 \bar{\rho}'}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \bar{\rho}'}{\partial \eta \partial \xi}, ..., \frac{\partial^3 \bar{\rho}'}{\partial \zeta^2})$ содержит в себе остальные слагаемые, зависящие от $\bar{\rho}'$ и её производных. Левая часть уравнения (9) представляет собой оператор, описывающий процесс возникновения и распространения звука. Правая же часть уравнения (9) представляет собой источник звука, являющийся функцией звукового потенциала $\bar{\varphi}$ и его производных.

Поскольку звук генерируется внутри основного течения, то есть не является результатом активного излучения, то звуковая составляющая течения удовлетворяет граничному условию непроницания через поверхность в составе полной скорости течения. Полагаем, что в начальный момент времени, до взаимодействия потока с лопастью, звуковые возмущения течения отсутствуют. Таким образом, сформулирована задача генерации звука потоком.

Метод решения задачи

Поставленные задачи (7)-(8) и (9)-(10) содержат уравнения в частных производных, не имеющие аналитического решения. Поэтому для решения данных задач использовался численно - аналитический метод, предназначенный для решения подобного рода задач. Более того, чем больше слагаемых в решаемом уравнении, тем расчётная матрица более наполнена, неразряженная, что даёт возможность устойчивого счёта. В качестве расчетной использовалась 15-точечная схема, которая уже была ранее хорошо изучена для пространственной нестационарной задачи генерации звука в потенциальном приближении [5,7].

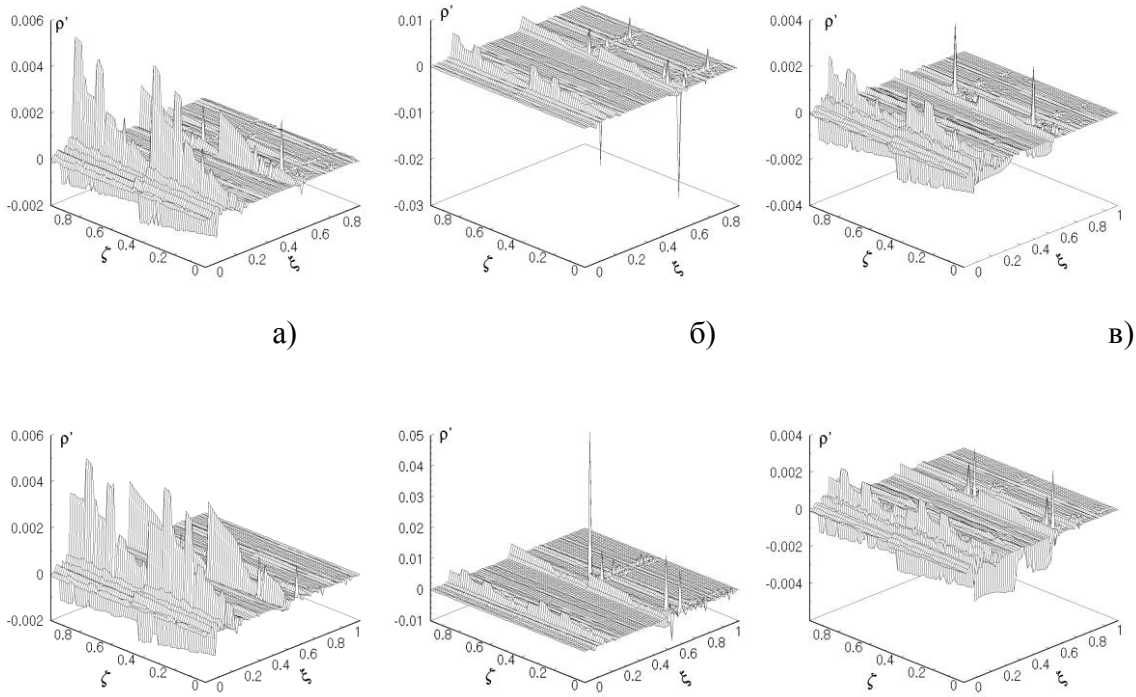
Ближнее поле

В качестве характеристики ближнего звукового поля рассмотрим безразмерные пульсации плотности $\bar{\rho}'$ на поверхности лопасти. Они определяют зоны наиболее интенсивной генерации звука и области относительного спокойствия – слабой генерации звука.

Для численного расчета взята тестовая лопасть, параболической формы $y = x(1-x)$ в поперечном сечении и прямоугольной формы вдоль её размаха. При этом $AR = 10, c = 0,3м$, числа Маха $M = 0,2; 0,4$.Угол постановки лопасти в плоскости вращения выбирался $\alpha = 30^\circ, 60^\circ$,а угол атаки по отношению к встречному потоку составлял $\alpha = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$.

Обращают на себя внимание определённые закономерности распределения $\bar{\rho}'$ (рис.3). На поверхности лопасти присутствуют две области повышенной генерации звука, представляющие собой две серии отчётливо выраженных пиков $\bar{\rho}'$.Эти области уже были замечены ранее при решении других задач генерации звука вращающейся лопастью [4,6,8]. Как ранее было установлено, первая из областей генерации звука определяет шум вращения лопасти, который имеет дипольную природу. Вторая серия пиков, расположенная по центру лопасти, описывает переходной процесс преобразования энергии шума вращения в вихревой BVI-шум. Поскольку в рассматриваемой в данной работе задаче произведён учёт граничного условия на концах лопасти, чего не было ранее сделано для системы уравнений (8)-(9), то полученные расчётные данные имеют определённое различие (равно как и сходство в

отдельных расчётных случаях) от данных работы [8]. Так различие в распределении $\overline{\rho}'$ наблюдается при малых углах атаки $\gamma = 5^\circ$ и числе Маха $M = 0,2$ во второй серии пиков. Если ранее, без учёта концевого вихря, во второй серии пики были выражены резче, имели треугольную форму, то здесь уже они стали плавней – в виде трапеции.

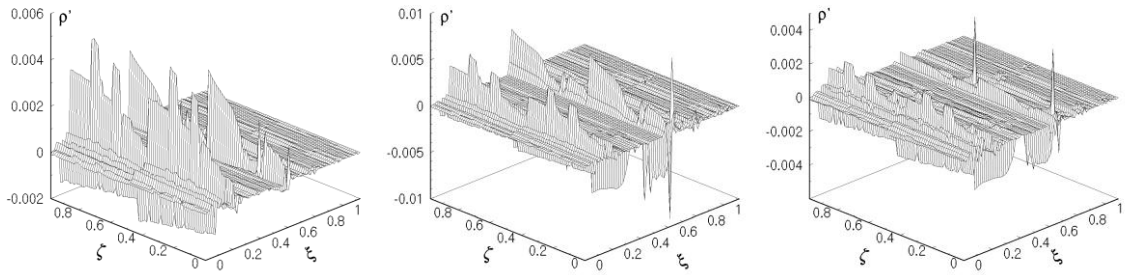


а) б) в)

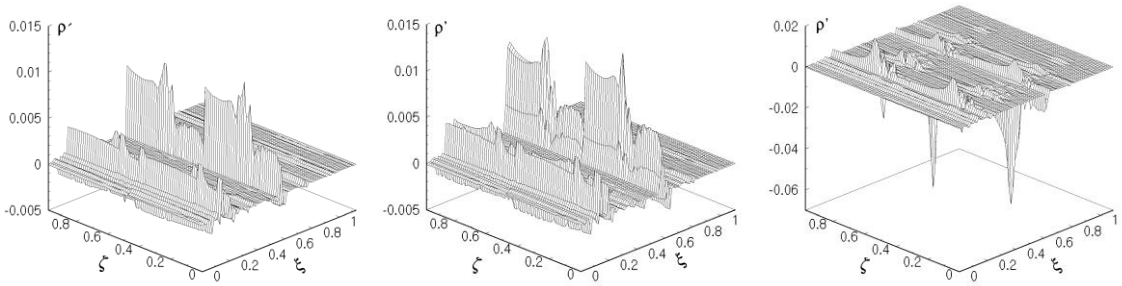
г) д) е)

Рис.3 Распределение пульсаций плотности для $M = 0,2$.

Для угла атаки $\gamma = 10^\circ$ обе серии пиков блики друг к другу. И лишь два следа после второй зоны пиков, зоны неустойчивости, различны: в задаче с учётом концевого вихря Скулли они более сглажены, а в задаче без учёта концевого вихря наблюдается повышенная неустойчивость в 2-х следах перед сходом потока с поверхности лопасти. Это потому, что концевой вихрь оказывает определённое влияние на зоны устойчивости течения.



а) б) в)



г) д) е)

Рис.4 Распределение пульсаций плотности для $M = 0.4$.

Для случаев $M = 0,2; \alpha = 60^\circ$ и $M = 0,4; \alpha = 30^\circ$ распределения плотности $\overline{\rho}'$ качественно похожи, за исключением лишь незначительных количественных различий. Однако, в случае $M = 0,4; \alpha = 60^\circ$ картина распределения $\overline{\rho}'$ отличается от случая без учёта концевого вихря. Так, если ранее в данной расчётной ситуации указанные две зоны генерации звука были вырождены в 4 пика [8], то в рассматриваемой в данной работе задаче первая зона генерации звука достаточно плавная. Вторая зона, здесь уже преобладающая по уровню над первой зоной пиков, также имеет распределение пиков плавней: два локально выраженных пика уже не столь доминируют над общим уровнем второй зоны.

Указанные различия ещё раз говорят о том, что учёт концевого вихря при моделировании генерации шума вращения лопасти делает численное решение плавным, близким к реальной ситуации.

Дальнее поле

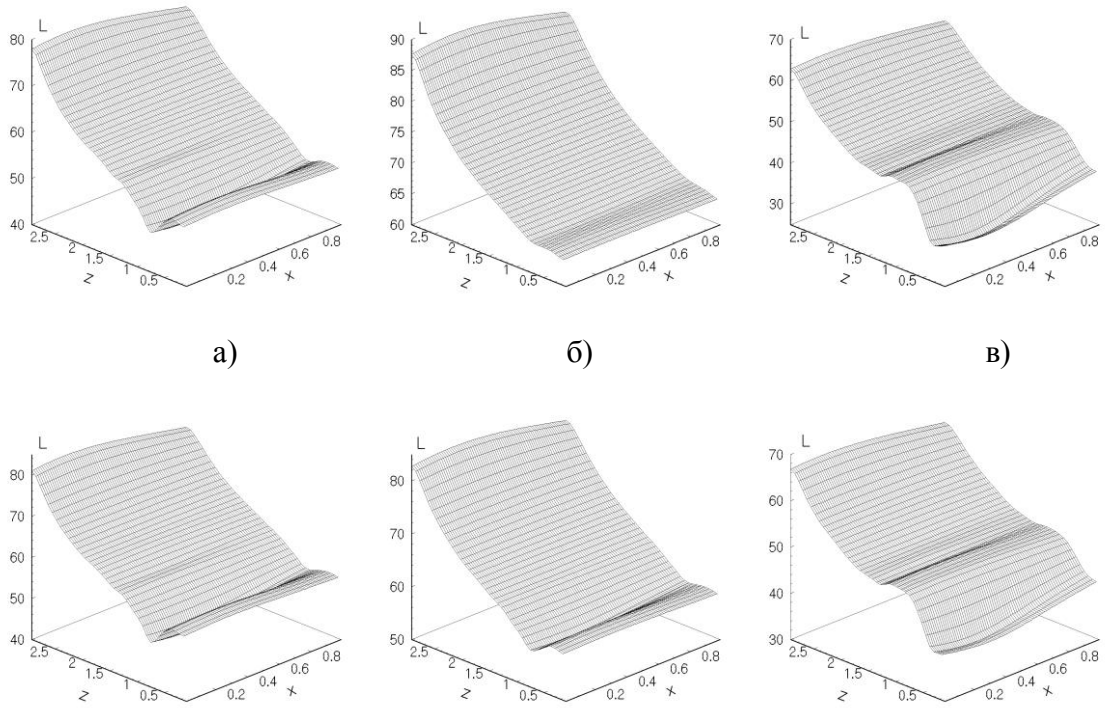
Наиболее важной характеристикой, отображающей процесс генерации звука, есть уровень звукового давления L (по отношению к $2 \cdot 10^{-5} Па$). Эту величину рассчитывают на основе интегрального представления дальнего поля:

$$-M_1^2 \int_s \left[\frac{F}{R} \right]_{t^*} dS_x + \int_s \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{1}{Ra_\infty} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial (1/R)}{\partial n} \right]_{t^*} dS = 4\pi \varphi(x, t_1),$$

где $F = \rho\left[(\nabla\varphi \cdot \nabla)\overline{v} + (\overline{v} \cdot \nabla) \cdot \nabla\varphi\right] + \rho'(\overline{v} \cdot \nabla)\overline{v} + \overline{v} \cdot div(\rho\nabla\varphi + \rho'\overline{v}) + \nabla\varphi div(\rho\overline{v})$, которое включает в себя не только $\overline{\rho}'$, но и её производные. Это позволяет в большей степени учесть особенности процесса генерации звука на поверхности лопасти. Анализ результатов расчёта решённой задачи даёт возможность провести сравнение полученных данных с задачей без учёта концевых эффектов [8]. В случае $M = 0,2; \alpha = 30^\circ, \gamma = 5^\circ$ максимальный уровень шума составил порядка 82Дб в обеих задачах. Однако с учётом концевого вихря общий перепад уровня давления больше на 10Дб:82-45Дб, а в задаче без учёта концевого вихря составил 82-55Дб и форма поверхности L в целом более плавная, а с учётом вихря - наблюдается провал L в комлевой зоне до 45Дб.

В случае $M = 0,2; \gamma = 10^\circ$ форма поверхности L в обеих задачах практически одинакова, а вот уровень в задаче без учёта концевых вихрей в целом по всей

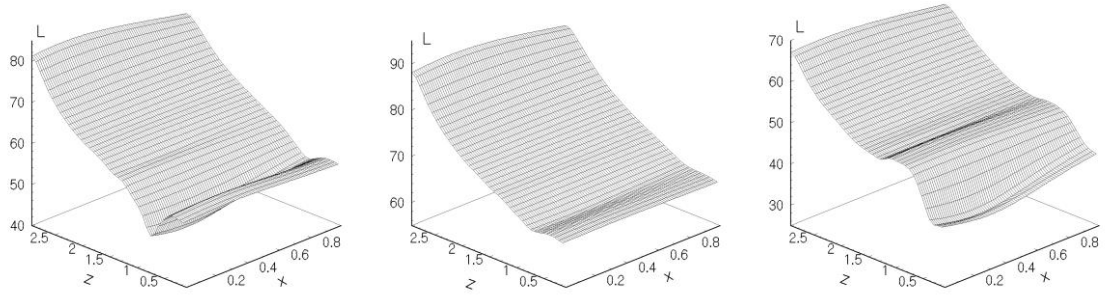
поверхности лопасти выше на 8Дб. Это ещё раз говорит о том, что присутствие в значительной мере завихренности в течении трансформирует часть энергии шума вращения в вихревой шум с более низким уровнем. Эта же тенденция наблюдается и для угла атаки $\gamma = 15^{\circ}$,где дополнительно в области комлевой части ($z = 0$)лопасти заметно существенное снижение шума до 30Дб. В то же время в решённой ранее задаче без учёта вихря [8] уровень шума составлял порядка 42Дб. При этом максимальный уровень шума отличался на 5Дб, а минимальный на 12Дб. Это ещё раз подтверждает выявленный ранее факт: при малых скоростях (комлевая часть лопасти) вихревая составляющая течения существенно влияет на трансформацию энергии потока в вихревой шум. С увеличением скорости течения (на внешнем конце лопасти) это влияние снижается.



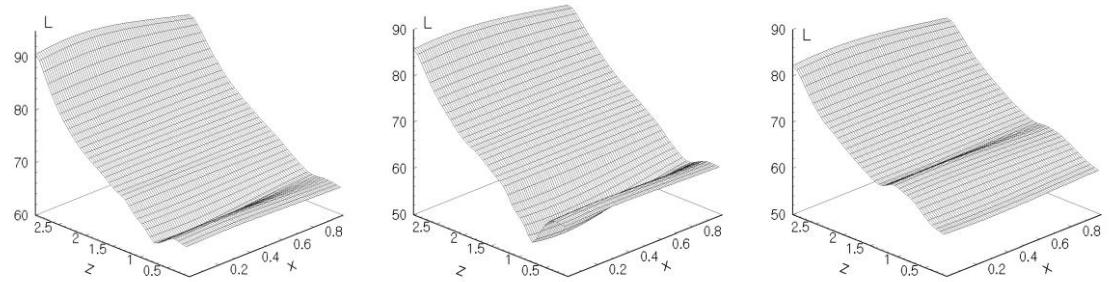
а) б) в)

г) д) е)

Рис.5. Уровень нормированного звукового давления $M = 0,2$



а) б) в)



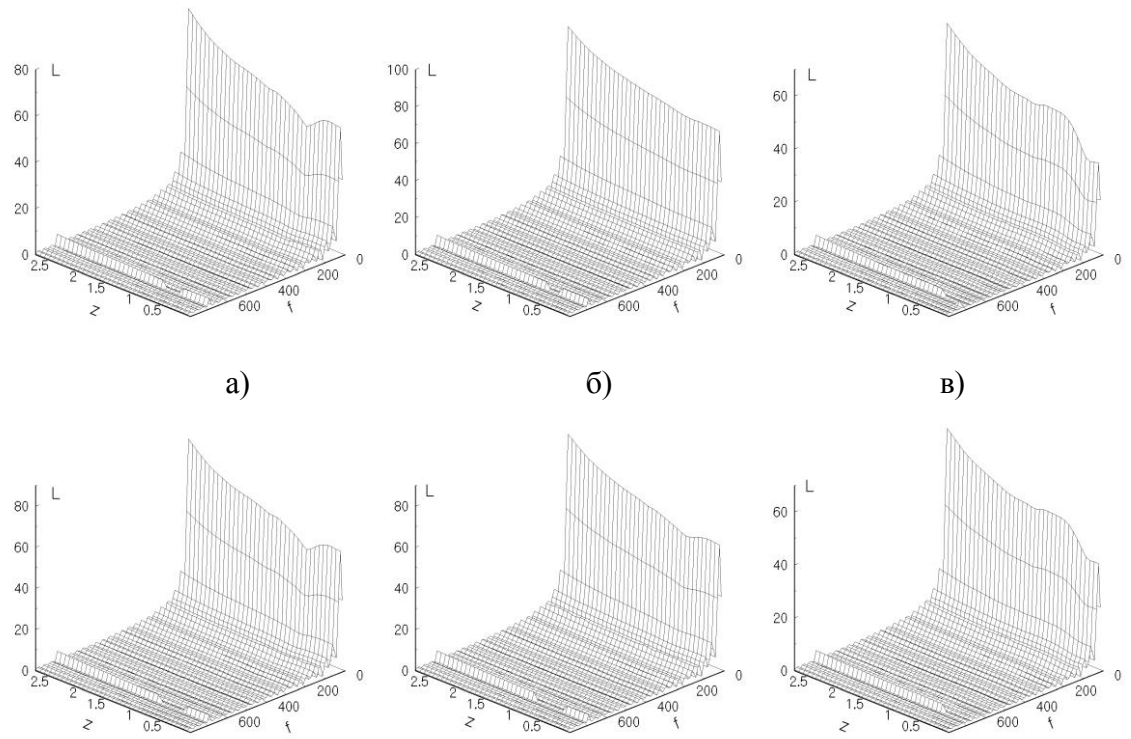
г) д) е)

Рис.6. Уровень нормированного звукового давления $M = 0,4$

Для угла постановки лопасти к потоку $\alpha = 60^\circ$ качественная картина остаётся той же, а вот количественные различия присутствуют. Здесь лишь для угла атаки $\gamma = 10^\circ$ уровень L на 5Дб ниже чем в задаче без учёта концевых эффектов. Для углов атаки $\gamma = 5^\circ; 15^\circ$ максимальный уровень L практически одинаков, а вот минимальный уровень отличается примерно на 10Дб.

С увеличением скорости набегающего потока $M = 0,4$ качественные различия, описанные для случая $M = 0,2$,те же. Количественно лишь для некоторых ситуаций ($\gamma = 10^\circ$)уровень шума выше без учёта вихря, чем в рассматриваемой в данной работе задаче. Отличительной особенностью обладает случай $\alpha = 60^\circ; \gamma = 10^\circ$ и $\alpha = 60^\circ; \gamma = 15^\circ$.Так при $\gamma = 10^\circ$ уровень шума без учёта концевого вихря достигает 102Дб, в то время как с учётом концевого вихря составил лишь 90Дб. Однако для близкого к критическому углу атаки $\gamma = 15^\circ$, наоборот, с учётом концевого вихря максимальный уровень L составляет 83Дб, а без учёта – всего 73Дб. Это значит, что на окончательную картину генерации шума одновременно влияют все перечисленные выше параметры – число Маха, угол атаки лопасти и угол постановки её к встречному потоку. Причём это влияние, как показал выше изложенный анализ, для разных комбинаций параметров различное.

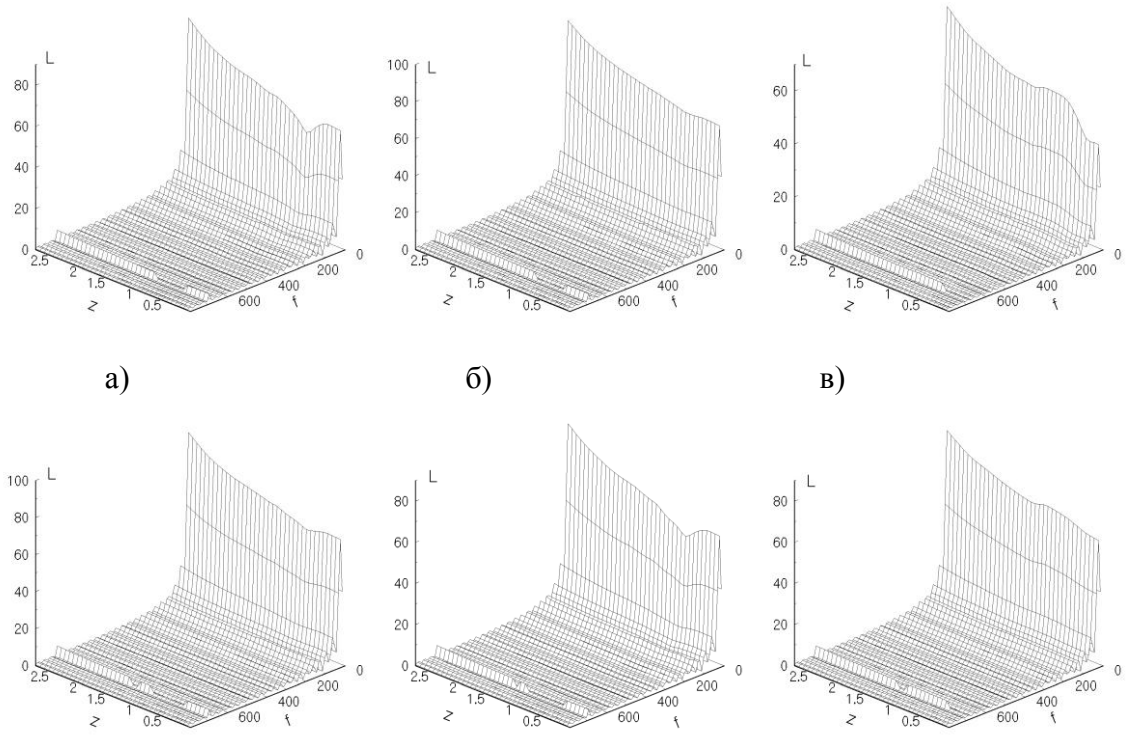
Что же касается частотного спектра генерируемого шума, то он отражает описанные выше различия L. В тех случаях, где поверхность L генерируемого шума плавней, огибающая в частотном спектре шума также плавная. Значительные перепады уровня шума в комлевой части также отразились в виде впадин огибающей частотного спектра. Вихревая составляющая шума, обнаруженная в районе 700Гц, в рассматриваемой в данной работе задаче более чётко выражена во всех описанных выше расчётных ситуациях, чем в задаче без учёта концевых вихрей. Описанные выше расчётные данные согласуются с теоретическими и экспериментальными данными подобного рода задач [9,10].



а) б) в)

г) д) е)

Рис.7 Спектр генерируемого шума $M = 0,2$



а) б) в)

г) д) е)

Рис.8 Спектр генерируемого шума $M = 0,4$

Выводы

1. Получены представления компонент индуктивного поля скорости в присоединённом вихре, ядро которого расположено на удалённом от оси вращения конце лопасти.
2. Поставлена и численно решена задача генерации BVI-шума лопастью ротора вертолёта, учитывающая присоединённый концевой вихрь Скулли, генерируемое ним распределение поле индуктивных скоростей вдоль по размаху лопасти.
3. Выполнен сравнительный анализ полученных расчётных данных с задачей без учёта концевого вихря на торцах лопасти. В частности обнаружено, что зоны генерации звука (возмущения плотности) в ближнем поле расположены в том же месте, где и в задаче без учёта концевого вихря. Однако пики $\bar{\rho}'$ заметно плавней. Этот факт сказался и на распределении уровня давления в дальнем поле. Общий уровень давления L в задаче с учётом концевого вихря в ряде расчётных случаев ниже, чем без учёта его.

Литература

1. Джонсон У. Теория вертолёта: В 2-х книгах./ Джонсон У. – М.:"Мир",1983,т.1,2-1024с.
2. Scully M.P. Computation of Helicopter Rotor Wake Geometry and Its Influence on Rotor Harmonic Airloads. /. Scully M.P.// Massachusets Institute of Technology,ASPL TR 178-1,March 1975.
3. Alasdair Thom and Karthikeyan Duraisamy. High-Resolution Simulation of Parallel Blade-Vortex Interactions. /Alasdair Thom and Karthikeyan Duraisamy.//AIAA Journal.2010, v.48, No10, p.2313-2324.
4. Лук'янов Петро В. Генерація звуку взаємодії вихорів Тейлора і Скуллі з лопаттю змінної товщини./Лук'янов Петро В.// Наукові вісті НТУ „КПІ".Сер.:фіз.-мат.науки,2014,№4.С.139-145.
5. Лукьянов П.В. Об одном численно-аналитическом подходе к решению задачи генерации звука тонким крылом. Часть II. Схема применения для нестационарных задач.//Лукьянов Петро В./Акустичний вісник.-2012-№3(15).-С.45-52.
6. Лук'янов Петро В. Шум взаємодії вихору і лопаті гелікоптера. //Лукьянов Петро В./ Наукові вісті НТУ „КПІ".Сер.:фіз.-мат.науки,2013,№4.С.132-136.
7. Пётр В. Лукьянов. Математическое моделирование BVI-шума лопасти вертолёта при её наклонной обдувке.//Пётр В. Лукьянов./ Вісник Черкаського Університету. Серія Прикладна математика. Інформатика, №18(271),2013.С.:11-20.
8. Лукьянов П.В. Влияние угла атаки лопасти на генерацию шума взаимодействия вихрей и ротора вертолёта.//Лукьянов П.В./ Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества.№3, 2014.С.:45-58.
9. 9.Gallman J.M. Parametric Computational Study of Isilated Blade-Vortex Interaction Noise./ Gallman J.M. // AIAA Journal. 1994.Vol.32. №2. P.232-238.
10. Гольдштейн М.Е. Аэроакустика./Гольдштейн М.Е. - М.:Машиностроение,1981.296с.

Стаття надійшла _11_._11_._2014___
Прийнято до друку _25_._11_._2014___

Анотація

Петро В. Лук'янов

Вплив приєднаного прикінцевого вихору лопаті ротора гелікоптера на генерацію BVI-шуму

В роботі в трьохвимірній нестаціонарній постановці, з урахуванням граничної умови на торцях лопаті ротора гелікоптера, поставлено та розв'язано задачу генерації шуму взаємодії лопаті і вихорів (BVI-шум). Для її розв'язання попередньо було отримано вирази компонент індуктивної швидкості течії, що генерується вихорем Скули, який розташований на зовнішньому кінці лопаті, що обертається. Загальна задача розділена на дві частини:

аеродинамічну та акустичну. Аеродинамічна частина задачі являє собою замкнену систему рівнянь Ейлера та нерозривності для баротропного газу. Акустична частина задачі складається з системи двох рівнянь для звукового потенціалу та пульсацій густини. Обидві частини задачі розв'язано чисельно за допомогою чисельно-аналітичного метода. Виконано порівняльний аналіз результатів числового розрахунку даної задачі з аналогічною задачею без урахування кінцевих вихорів. Зокрема виявлено, що наявність кінцевих вихорів в моделі робить шум переважно шумом вихрового характеру, тому нижче за рівнем шуму в відсутності кінцевих вихорів. При цьому характерна для нього частота 700Гц виражена більш чітко.

Ключові слова: *модель прикінцевого вихору, генерація BVI-шуму лопаттю ротора гелікоптера.*

Summary

Petro V. Lukianov

Influence of the helicopter's rotor blade tip bound vortex on BVI-noise generation

In this paper three-dimensional non-stationary problem, with helicopter's blade tip boundary condition taking into account, of the blade-vortex interaction (BVI) sound generation has been set and solved. For it solving, one has deduce formulas for components of the inductive velocity for Scully's vortex distribution, which is at the external tip of rotating blade. General problem consists of two parts: aerodynamics and acoustics problems. Aerodynamics problem corresponds a closed system of Euler's equation and continuity equation for barotropic gas. Acoustical part is consisted of system of two equations for sound potential and density pulsations. Both parts of general problem has been solved by means of numerically analytical method. A comparative analysis of the numerical calculations has been carried out for the two situations – with- and without tip vortex present. In particular it has been manifested that tip vortex presentation in the model make noise mainly vortex type. Its level is lower that noise without tip vortex and individual frequency 700Hz shows more clearly.

Key words: *model bound vortex, BVI-noise generation by helicopter's rotor blade.*

СЕКЦІЯ «ІНФОРМАТИКА»

УДК 378.147:004.25(07) **L.V.Grishko**

BASIC PROGRAMMING: COMPETENCE APPROACH

This article focuses on miscellaneous approaches in teaching programmers-to-be with the aim to help the latter form key competences. Basic programming competences which students ought to develop while mastering the subject receive their definition. The explanation is given to the choice of structural paradigm of programming and programming language for teaching.

Keywords: *teaching, bssic programming, competence, paradigm of programming and programming languages.*

Introduction

The competition at the modern labor market demands from a professional to quickly learn new technologies and also to easily adapt to new working conditions. Therefore the concept of the education system is connected with the attempt to approximate the final results to the planned ones. This can be realized due to the implementation of the competence approach in the process of training.

The competence approach in its modern shape is specified by ideas of general and personal development characterized by psychological and pedagogical concepts according to which education must be developing and personality-centered. Thus the educational content is defined by a 4-component model: knowledge, skills, creative experience and values [1].

Aim

The aim of the article is to study conditions under which students develop general and special competences of a programmer while mastering the basic programming.

The body of the article

The competence approach includes two basic concepts. The first one comprises a set of interdependent personal values connected with certain objects and processes. The second one is the capacity, i.e. a person has a certain competence including personal attitude to the latter and the object of their activity [2]. Educational competence is understood as a set of knowledge, skills, abilities and a student's experience connected with certain objects of reality, necessary to carry out personal and socially important fruitful activity.

- Educational competences together with the educational content are differentiated by the following levels [1]:
- key competences (realized on the general level, common for all subjects);
- general subject competences (formed on the level of a set of subjects, or an educational branch);
- subject competences (realized within one subject).

There are various ways to form key competences and their classifications. For instance, Russian typology includes general cultural, cognitive, informational, communicational, and social competences of self-improvement. According to OCR certification (developed by Oxford and Cambridge Certification Boards) there are key competences of several levels necessary for training a high-quality specialist of any professional activity: 1 –

communication skills; 2 – numeracy skills; 3 – IT skills; 4 – interaction with other people; 5 – raise of training skills and professional efficiency; 6 – problem-solving skills; 7 – self-development skills [3].

Accordingly the competence approach to basic programming training focuses on the training results. The latter are regarded not as the sum of knowledge received by a student during their training but the ability to employ this knowledge in the process of studies and future professional activity. On the whole the success of a specialist in the future professional and social activity is determined by the level of development of their key competences [4, 5].

Basic programming competences are the following:

General:

- the capacity to practically employ basic programming knowledge, skills and abilities in the process of computer science training, other subjects studying and professional activity in future;
- plan and arrangement of the studying activity;
- information search and analysis of data received from various sources;
- formalization of the knowledge, its accumulation;
- team-work;
- usage of foreign languages in the professional activity;

Special:

- the algorithm making and program writing;
- application and combination of typical algorithms and familiar programming languages;
- fixing and texting of educational programs in the environment of a programming language developing;
- understanding the application areas of basic programming, its employment on other profession-oriented and special subjects, and in future professional activity;
- mastering of new programming languages.

The choice of programming paradigm and the programming language are the problems in basic programming training. There are different programming paradigms representing independent approaches: functional, imperative, object-oriented, declarative etc. These days there are used such computer systems that make it possible to use parallel programming: a program is being made on one computer and is split into tasks in parallel programming. These tasks are done on the virtual multiprocessor computer simultaneously, though in reality only one task can be used at a time. Information torrents are regulated by new technologies – net programming – providing the Internet navigation.

The analysis of higher education teaching plans and programs, educational standards for computer science in the majority of Ukraine's higher learning institutions demonstrates that structural programming is studied as the basic programming. This develops imperative programming.

Structural principles of programming were formulated in the fundamental works of V.M. Hlushkov on the theory of discrete transformations in which the researcher defined the main structures and rules of their compositions and proved fundamental theorem about the possibility to transform the program into a structural form without altering the database the program works with [6]. According to works by E. Deikstra [7] program structural organization meets the demands of program correctness proof and allows changes without complications.

We also view basic programming training on the ground of structural programming due to the following:

- programming is one of the human activities requiring high accuracy and diligence. Instilling these qualities to students who create their own programs is the most complicated task in the process of programming training. It is possible to form these qualities using the structural approach. Implementation of structural organization helps to form and develop algorithmic thinking ([8], [9], [10]). The latter means the sequence of actions and together with logical and artistic thinking determines one's intellectual level and creative potential. Planning skills with the habit to accurately and fully describe one's actions help professional programmers develop miscellaneous problem-solving algorithms.
- the necessity of teaching continuity. Structural programming is traditionally studied in Ukraine in the school programming course, chapter "Algorithm and Programming", in Pascal.

Regarding the choice of programming language for basic programming it is necessary to note that the programming language is the main tool of "communication" of the programmer and the PC. The modern level of IT development demands from the programmer to be able to create software in different languages and even different styles simultaneously. The knowledge of different programming paradigms, and several programming languages, and understanding of main differential features of programming languages enables the programmer to easily master new programming languages and develop together with the programming industry.

The high quality of basic programming training of the programmers-to-be within the course is provided by the opportunity to master two programming languages: Pascal and C.

The experience demonstrates that students should be taught to Pascal programming language first, which was developed by N.Virt "for beginners, how to write programs". Also "…structural programming shaped the descending principle of development (step-by-step decomposition), structuring of logics and data due to simplicity and mathematical ground, and raised the software reliability. Laconic Pascal makes this all possible" [11].

C programming language is chosen as a perspective one for the main practical programming industries:

- C is a universal language, closely connected with the systemic programming which is significant for future software developers;
- The number of programmers using C program language is increasing nowadays;
- syntax and semantics of new programming languages (Java, JavaScript, C#, PHP, etc.) are partially based on the concepts characteristic for C language.
- the knowledge of syntax and semantics of C programming language will become the ground for mastering C++. Its author, B. Straustrup, states that not considering some details C++ is the next one after C" [12];
- C programming language together with C++ and Java, developed on its basis, influence the development of programming in the greatest degree;
- C programming language knowledge can be applied in different practical areas because it has enough operators and the possibility to structure data.

It is necessary to mention that C programming language knowledge will help students to master "object Oriented Programming", "System Programming", "Operation System" etc.

The sequence of (Pascal -> C) training enables:

- to provide similar starting level of knowledge and skills on algorithms among students for studying the main chapters in basic programming;
- improve the knowledge of those students who have already mastered Pascal programming language earlier;
- starting from the first semester solve algorithmically difficult problems.

By using common features in the ruling constructions of Pascal and C programming languages, provide comparative training to these languages. This enables profound mastering of them.

Conclusion

Teaching experience demonstrates that competence approach in basic programming training of future programmers as a part of basic programming methodology facilitates the formation of programmer's general and key competences among students and form professional qualities [13] of a specialist in the sphere of computer science.

Literature

1. Проблемы и перспективы реализации компетентностного подхода в образовании : (Проблемы компетентностного подхода) [Електронний ресурс] / А.Г. Бермус // Интернет-журнал «Эйдос» – Научные исследования. – Режим доступу до журн. : http://www.auditorium.ru
2. Хуторской А.В. Ключевые компетенции и образовательные стандарты // Интернет-журнал "Эйдос". – 2002. – 23 апреля. http://www.eidos.ru/journal/2002/0423.htm
3. Ключевые компетенции 2000. Программа. Уровни 1, 2, 3, 4, 5. KEY SKILLS 87 0005 (OCR. RECOGNISING ACHIEVMENT. – Oxford Cambridge and RSA Examinations).
4. Мозолин В. В. Компетентностный подход в обучении информатике: возможности и проблемы/В. В. Мозолин//Информатика и образование. – 2005. – №2. – С. 115 – 116.
5. Введенский В.Н. Регулятивная компетенция специалиста как проявление регулятивной функции психики личности // Инновации в образовании.- 2014.- №1.- С.127-136.
6. Глушков В.М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм / **В.**М. Глушков // Кибернетика, 1965. – № 5. – С. 1–10.
7. Дейкстра Э. Заметки по структурному программированию // Дал У., Дейкстра Э., Хоор К. Структурное программирование. – М.: Мир, 1975. – 247 с.
8. Ершов А.П. Программирование – вторая грамотность http://ershov.iis.nsk.su/russian/second_literacy/article.html
9. Кнут Д. Э. Алгоритмическое мышление и математическое мышление http://www.philosophy.ru/library/math/knut.html
10. Копаєв О. В. Алгоритмічна діяльність та рівень розвитку теоретичного мислення // Вісник Черкаського Національного університету. Серія «Педагогічні науки». Випуск 55. – Черкаси, 2004. – С. 77-81.
11. http://www.osp.ru/pcworld/2001/04/161427 Летопись языков Паскаль // Интернет-журнал «Мир ПК».
12. Страуструп Б. Язык программирования С++, 3-е изд.: Пер. с англ. – СПб.; М.: "Невский диалект" – "Издательство БИНОМ", 1999. – 991 с.
13. Гришко Л. В. Методична система навчання основ програмування майбутніх інженерів-програмістів : дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук : 13.00.02 / Л. В. Гришко. – Київ, 2009. – 276 с.

Стаття надійшла _11_._11_._2014___
Прийнято до друку _25_._11_._2014___

Анотація

Л.В. Гришко

Про компетентнісний підхід в процесі навчання основ програмування майбутніх програмістів

У роботі розглядаються різні підходи до формування ключових компетенцій майбутніх інженерів-програмістів. Також визначаються компетентності з основ програмування, які потрібно і можна сформувати у студентів у процесі навчання основ програмування. Обгрунтовується вибір структурної парадигми програмування і вибір відповідної мови програмування для навчання.

Ключові слова: *навчання, основи програмування, компетентність, парадигма програмування, мова програмування*.

Аннотация

Л.В. Гришко

О компетентностном подходе в процессе обучения основам программирования будущих программистов

В работе рассматриваются различные подходы к формированию ключевых компетенций будущих инженеров-программистов. Также определяются компетентности по основам программирования, которые нужно и можно сформировать у студентов в процессе обучения основам программирования. Обосновывается выбор структурной парадигмы программирования и выбор соответствующего языка программирования для обучения.

Ключевые слова: *обучение, основы программирования, компетентность, парадигма программирования, язык программирования.*

УДК 004.055 + 004.5 **Е.И. Клюев, Е.А. Гриненко**

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ

В статье рассмотрена возможность оценки качества параметров программных средств (ПС) на основе положений стандарта (ГОСТ 28195-89), метода принятия решений в условиях наличия информации, не имеющей определенного характера, и нейронных сетей.

Основная задача данной работы связана с демонстрацией возможности использования нейронных сетей и метода принятия решения для оценки качества параметров программных средств.

Ключевые слова: *качество программных средств, нейронные сети, метод принятия решения.*

Анализ исследований

Качество программных средств (ПС) – характеристика ПС как степени его соответствия требованиям. Чаще всего для трактовки качества ПС используется определение ISO 9001, согласно которому качество есть «степень соответствия присущих характеристик требованиям». Качество кода может определяться различными критериями. Многие из имеющихся стандартов оформления кода, определяющих специфичные для используемого языка соглашения и задающие ряд правил, улучшающих читаемость кода, имеют своей целью облегчить будущее сопровождение ПС, включающее отладку и обновление. Существуют и другие критерии, определяющие, «хорошо» ли написан код, например, такие, как структурированность – степень логического разбиения кода на ряд управляемых блоков. Быстрое увеличение сложности и размеров современных комплексов программ при одновременном росте ответственности выполняемых функций резко повысило требования со стороны заказчиков и пользователей к их качеству и безопасности применения. Испытанным средством обеспечения высокой эффективности и качества функционирования программ и программных комплексов являются международные стандарты. По мере расширения применения и увеличения сложности информационных систем выделились области, в которых ошибки или недостаточное качество программ либо данных могут нанести ущерб, значительно превышающий положительный эффект от их использования. Во многих случаях контракты и предварительные планы на создание сложных программных средств и баз данных для информационных систем подготавливаются и оцениваются не квалифицированно, на основе неформализованных представлений заказчиков и разработчиков о требуемых функциях и характеристиках качества информационных систем. Значительные системные ошибки при определении требуемых показателей качества, оценке трудоемкости, стоимости и длительности создания программных средств – явление достаточно массовое. Многие информационные системы не способны выполнять полностью требуемые функциональные задачи с гарантированным качеством, и их приходится долго и иногда безуспешно дорабатывать для достижения необходимого качества и надежности функционирования, затрачивая дополнительно большие средства и время. В результате часто проекты информационных систем не соответствуют исходному, декларированному назначению и требованиям к характеристикам качества, не укладываются в графики и бюджет разработки.

Стандартизация характеристик качества

В технических заданиях и реализованных проектах информационных систем часто обходятся молчанием или недостаточно формализуются сведения о понятиях и значениях качества программного продукта, о том, какими характеристиками они описываются, как их следует измерять и сравнивать с требованиями, отраженными в контракте, техническом задании или спецификациях. Кроме того, некоторые из характеристик часто отсутствуют в требованиях на программные средства, что приводит к произвольному их учету или к пропуску при испытаниях. Нечеткое декларирование в документах понятий и требуемых значений характеристик качества программных средств вызывает конфликты между заказчиками-пользователями и разработчиками-поставщиками из-за разной трактовки одних и тех же характеристик. В связи с этим стратегической задачей в жизненном цикле современных информационных систем стало обеспечение требуемого качества программных средств и баз данных. За последние несколько лет создано множество международных стандартов, регламентирующих процессы и продукты жизненного цикла программных средств и баз данных. Применение этих стандартов может служить основой для систем обеспечения качества программных средств. Одной из важнейших проблем обеспечения качества программных средств является формализация характеристик качества и методология их оценки. Для определения адекватности качества функционирования, наличия технических возможностей программных средств к взаимодействию, совершенствованию и развитию, необходимо использовать стандарты в области оценки характеристик их качества. Основой регламентирования показателей качества программных средств ранее являлся международный стандарт ISO 9126:1991 (ГОСТ РИСО / МЭК 9126-93). В данной работе регламентирующим документом, определяющим основные этапы оценки качества программных средств, является ГОСТ 28195-89.

Выбор показателей качества

Исходными данными и высшим приоритетом при выборе показателей качества в большинстве случаев являются назначение, функции и функциональная пригодность соответствующего программного средства. Процессы выбора и установления метрик и шкал для описания характеристик качества программных средств можно разделить на два этапа:

- выбор и обоснование набора исходных данных, отражающих общие особенности и этапы жизненного цикла проекта программного средства и его потребителей, каждый из которых влияет на определенные характеристики качества комплекса программ;
- выбор, установление и утверждение конкретных метрик и шкал измерения характеристик и атрибутов качества проекта для их последующей оценки и сопоставления с требованиями спецификаций в процессе квалификационных испытаний или сертификации на определенных этапах жизненного цикла программного средства.

На первом этапе за основу следует брать всю базовую номенклатуру характеристик, субхарактеристик и атрибутов, стандартизированных в ISO 9126, ГОСТ 28195-89. Их описания желательно предварительно упорядочить по приоритетам с учетом назначения и сферы применения конкретного проекта программного средства. Далее необходимо выделить и ранжировать по приоритетам потребителей, которым необходимы определенные показатели качества проекта программного средства с

учетом их специализации и профессиональных интересов. Подготовка исходных данных завершается выделением номенклатуры базовых, приоритетных показателей качества, определяющих функциональную пригодность программного средства для определенных потребителей.

На втором этапе, после фиксирования исходных данных, которое должен выполнить потребитель оценок качества, процессы выбора номенклатуры и метрик начинаются с ранжирования характеристик и субхарактеристик для конкретного проекта и их потребителя. Далее этими специалистами для каждого из отобранных показателей должна быть установлена и согласована метрика и шкала оценок субхарактеристик и их атрибутов для проекта и потребителя результатов анализа.

Оценка качества

Методологии и стандартизации оценки характеристик качества готовых программных средств и их компонентов (программного продукта) на различных этапах жизненного цикла посвящен международный стандарт ISO 14598, состоящий из шести частей, а также ГОСТ оценки качества программных средств (ГОСТ 28195-89). Рекомендуется следующая общая схема процессов оценки характеристик качества программ:

- установка исходных требований для оценки – определение целей испытаний, идентификация типа метрик программного средства, выделение адекватных показателей и требуемых значений атрибутов качества;
- селекция метрик качества, установление рейтингов и уровней приоритета метрик субхарактеристик и атрибутов, выделение критериев для проведения экспертиз и измерений;
- планирование и проектирование процессов оценки характеристик и атрибутов качества в жизненном цикле программного средства;
- выполнение измерений для оценки, сравнение результатов с критериями и требованиями, обобщение и оценка результатов.

Для каждой характеристики качества рекомендуется формировать меры и шкалу измерений с выделением требуемых, допустимых и неудовлетворительных значений.

Методы определения показателей качества ПС различаются:

- по способам получения информации о ПС: измерительный, регистрационный, органолептический, расчетный;
- по источникам получения информации: традиционный, экспертный, социологический.

При подготовке исходных данных для формирования меры и шкалы измерений в данном случае используется расчетный метод. Расчетный метод основан на использовании теоретических и эмпирических зависимостей (на ранних стадиях разработки), статистических данных, накапливаемых при испытаниях, эксплуатации и сопровождении ПС. При помощи расчетного метода определяются длительность и точность вычислений, время реакции, необходимые ресурсы.

Оценки качества ПС

Оценка качества ПС проводится по фазам жизненного цикла (ГОСТ 28195-89, табл. 1) и включает выбор номенклатуры показателей, их оценку и сопоставление значений показателей, полученных в результате сравнения с базовыми значениями.

Показатели качества объединены в систему из четырех уровней. Каждый вышестоящий уровень содержит в качестве составляющих показатели нижестоящих уровней. Допускается вводить дополнительные показатели на каждом из уровней.

Для обеспечения возможности получения интегральной оценки по группам показателей качества используют факторы качества (1-й уровень): надежность ПС, сопровождаемость, удобство применения, эффективность, универсальность (гибкость) и корректность.

Каждому фактору качества соответствует определенный набор критериев качества (комплексные показатели – 2-й уровень): устойчивость функционирования, работоспособность, структурность, простота конструкции, наглядность, повторяемость, легкость освоения и др.

Критерии качества определяются одной или несколькими метриками (3-й уровень). Метрики составляются из оценочных элементов (единичных показателей – 4-й уровень), определяющих заданное в метрике свойство. Число оценочных элементов, входящих в метрику не ограничено. Пример взаимосвязи факторов, критериев и метрик с фазами жизненного цикла ПС приведен на рис.1 (см. ГОСТ 28195-89, рис. 1-9).

В процессе оценки качества ПС на каждом уровне (кроме уровня оценочных элементов) производятся вычисления показателей качества ПС, т.е. определение количественных значений абсолютных показателей (P_{ij}, где j-порядковый номер показателя данного уровня для i-го показателя вышестоящего уровня) и относительных показателей (K_{ij}), являющихся функцией показателя P_{ij} и базового показателя $p_{ij}^{баз}$.

Каждый показатель качества 2-го и 3-го уровней характеризуется двумя числовыми параметрами – количественным значением и весовыми коэффициентами (V_{ij}). Общая оценка качества ПС формируется экспертами на основании набора полученных значений оценок фактора качества. При оценке качества ПС методом экспертного опроса составляется таблица значений базовых показателей качества ПС.

Определение усредненной оценки (m_{kq}) оценочного элемента по нескольким его значениям ($m_э$) проводится по формуле:

$$m_{kq} = \frac{\sum_{э=1}^{t} m_э}{t},$$

где t – число значений ОЭ (оценочных элементов); k – порядковый номер метрики; q – порядковый номер ОЭ.

Итоговая оценка k-й метрики j-го критерия определяется по формуле:

$$p_{jk}^{M} = \frac{\sum_{t=1}^{Q} m_{kq}}{Q},$$

где Q – число ОЭ в k-метрике.

Абсолютные показатели критериев i-го фактора качества определяется по формуле:

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (p_{jk}^{M} \cdot V_{jk}^{M}),$$

где n – число метрик, относящихся к j-му критерию.

Относительный показатель j-го критерия i-го фактора качества вычисляется по формуле:

$$K_{ij} = \frac{P_{ij}}{p_{ij}^{баз}}.$$

Фактор качества ($K_i^{ф}$) вычисляется по формуле:

$$K_i^{ф} = \sum_{j=1}^{N} (K_{ij} \cdot V_{ij}^{k}),$$

где N – число критериев качества, относящихся к i-му фактору.

Качество ПС определяется путем сравнения полученных расчетных значений показателей с соответствующими базовыми значениями показателей существующего аналога или расчетного ПС, принимаемого за эталонный образец.

Ниже рассматривается пример оценки надежности ПС, в соответствии с ГОСТ 28195-89. Показан пример обработки экспертных значений базовых показателей фактора качества. Фактор качества охватывает и интегрирует все показатели качества нижних уровней, которые относятся к нему. Показателями нижнего уровня представляют собой оценочные элементы, которые отображают в количественном и качественном выражении определенные свойства ПС. На рис.1-3 представлены модели оценки надежности ПС на следующих этапах анализа жизненного цикла ПС: анализа; проектирования; тестирования, реализации, изготовления и сопровождения.

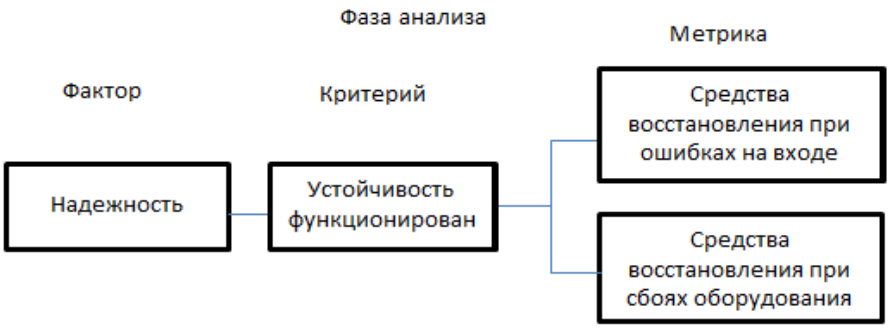


Рис.1 Взаимосвязь факторов, критериев и метрик фазы анализа качества ПС.

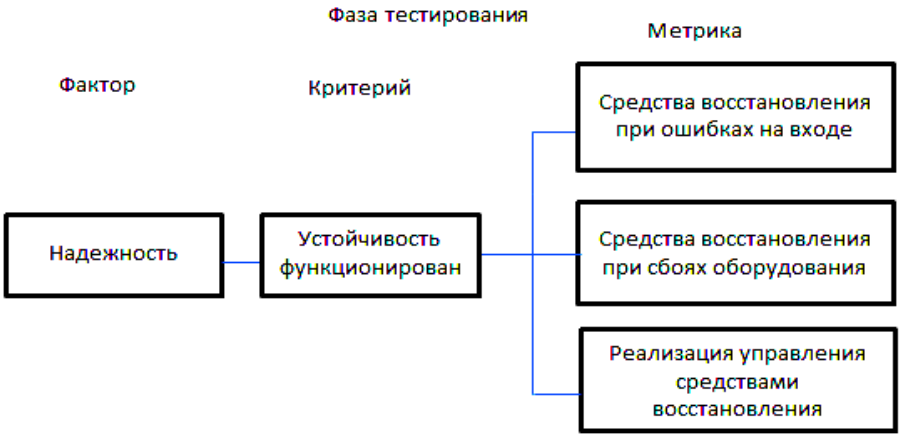


Рис.2 Взаимосвязь факторов, критериев и метрик фазы тестирования качества ПС.

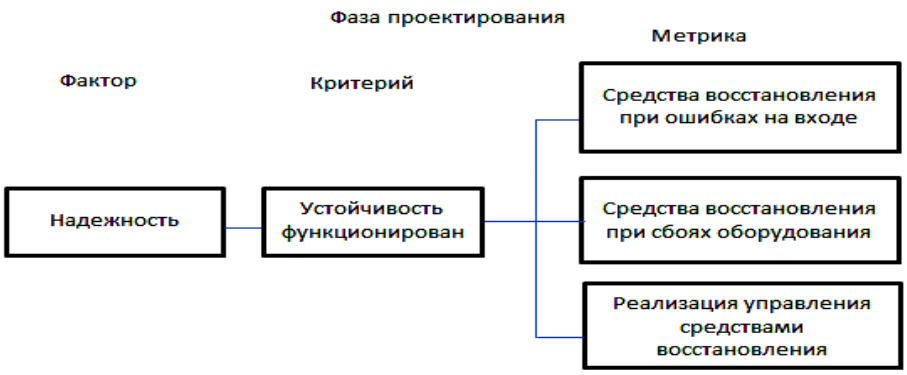


Рис.3 Взаимосвязь факторов, критериев и метрик фазы проектирования качества ПС.

Выбор оценочных элементов зависит от функционального назначения ПС и определяется с учетом данных, полученных при проведении испытаний различных видов, а также результатов эксплуатации ПС. В соответствии со списком оценочных элементов, приведенных в ГОСТ 2895-89 (табл.5) в данном случае выбирается 10 оценочных элементов (Н0101-Н0110), которые определяют первую метрику и соответственно 5 оценочных элементов (Н0201-Н0205), определяющих вторую метрику (табл.1). Представленные в таблице 2 данные получены на основе соотношений, рекомендованных в стандарте оценки качества ПС. В стандарте отмечается, что необходимые данные формируются путем использования экспертного метода, поэтому качество показателя определяется как усредненная оценка экспертных высказываний.

Таблица 1

Показатели оценочных элементов, сформированные на основе экспертных высказываний

1	Експерт	Н0101	Н0102	Н0103	Н0104	Н0105	Н0106	Н0107	Н0108	Н0109	Н0110	Н0201	Н0202	Н0203	Н0204	Н0205
2	№1	0,2	0,8	0	0	1	0	0,7	0,5	0,5	1	0,2	0	1	0,9	0,6
3	№2	0,3	0,5	0	0,1	0,8	0	0,5	0,4	0,5	0,8	0,3	0,2	1	0,8	0,7
4	№3	0,1	0,6	0	0	1	0,2	0,7	0,7	0,3	1	0,4	0	0,9	1	0,5
5	№4	0,3	0,6	0,1	0	0,8	0	0,6	0,4	0,4	0,8	0,2	0	1	0,8	0,5
6	№5	0,1	0,5	0	0,1	0,9	0	0,5	0,5	0,3	0,9	0,4	0,1	0,6	1	0,7
7	Усереднена	0,2	0,6	0,02	0,04	0,9	0,04	0,6	0,5	0,4	0,9	0,3	0,06	0,9	0,9	0,6

Итоговая оценка по первой метрике является средним значением оценочных элементов (Н0101-Н0110) и составляет:

$$P_{11}^{M} = \frac{0{,}2+0{,}6+0+0+0{,}9+0+0{,}6+0{,}5+0{,}4+0{,}9+0{,}3+0+0{,}9+0{,}6}{10} = 0{,}41.$$

Итоговая оценка по первой метрике является средним значением оценочных элементов (Н0201-Н0205), и составляет:

$$P_{12}^{M} = \frac{0{,}3+0+0{,}9+0{,}9+0{,}6}{5} = \frac{2{,}7}{5} = 0.54.$$

В примере весомость коэффициентов первой и второй метрик одинакова и

составляет:

$$V_{11}^{M} = V_{12}^{M} \frac{1}{количество \quad метрик} = 0{,}5 .$$

Поскольку в данном случае фактор надежности объединяет только один критерий, то итоговая оценка фактора надежности будет равна:

$$R_1^F = V_{11}^M \cdot P_{11}^M + V_{12}^M \cdot P_{12}^M = (0{,}41 \cdot 0{,}5) + (0{,}54 \cdot 0{,}5) = 0{,}475.$$

В таблице 2 представлен результат формирования и представления в табличном виде показателя фактора надежности ПС на основании эталонных экспертных значений оценочных элементов для последующей обработки данных нейронной сетью.

Таблица 2

Значения оценочных элементов и фактора надежность

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	H0101	H0102	H0103	H0104	H0105	H0106	H0107	H0108	H0109	H0110	H0201	H0202	H0203	H0204	H0205	Фактор
2	0,2	0,6	0	0	0,9	0	0,6	0,5	0,4	0,9	0,3	0	0,9	0,9	0,6	0,475

Рассмотренный пример показывает, что на основе эталонных значений множества оценочных элементов можно определить соответствующее им значение фактора надежности ПС.

Формирование показателей оценочных элементов на основе аппарата нечеткой логики

Использование нечеткой логики в сочетании с основными положениями экспертного метода дает возможность формировать численные значения оценочных элементов и последующего определения значений факторов качества ПС.

Использование аппарата нечеткой логики позволяет повысить эффективность экспертных методов путем предоставления экспертам возможности формирования высказываний о величинах значений оценочных элементов метрик ПС в некотором диапазоне альтернативных величин. Рассмотрим основные положения аппарата нечеткой логики с точки зрения его применимости при формировании значений параметров оценочных элементов ПС.

Основными элементами теории нечеткой логики являются понятия расплывчатой цели, расплывчатого ограничения и расплывчатого решения. Расплывчатая цель отождествляется с фиксированным расплывчатым множеством в соответствующем пространстве.

При использовании данного аппарата в качестве решения задачи выступает некоторое расплывчатое множество, определяемое как пересечение расплывчатых целей и расплывчатых ограничений, высказанных группой экспертов. Это решение может рассматриваться как нечетко сформулированная инструкция, причем диапазон интервала расплывчатого решения может служить мерой степени согласования мнений экспертов.

На основе аппарата теории нечетких множеств разработана процедура принятия решений в расплывчатых условиях, которая может быть использована для определения значений оценочных элементов ПС.

Формальное описание метода принятия решения в условиях неопределенности

можно найти в [1]. Важнейшим компонентом этого метода является представление расплывчатых целей $G_i(i=\overline{1,n})$ и расплывчатых ограничений $G_j(j=\overline{1,n})$, как расплывчатых множеств в пространстве альтернатив X с функциями принадлежности $\mu_{G_i}(x)$ и $\mu_{C_j}(x)$, соответственно. При этом подходе под решением понимается расплывчатое множество вида:

$$D = G_1 \bigcap G_2 \bigcap .. \bigcap G_n \bigcap C_1 \bigcap C_2 \bigcap .. \bigcap C_m ,$$

функция принадлежности которого определяется соотношением:

$$\mu_D(x) = \mu_{G_1}(x) \wedge \mu_{G_2}(x) \wedge ... \wedge \mu_{Gn}(x) \wedge \mu_{C_1}(x) \wedge \mu_{C_2}(x) \wedge ... \wedge \mu_{C_m}(x) \qquad (1)$$

Оптимальное решение, если оно существует, определяется как субнормальное подмножество $D^m \subset D$, задаваемое условием:

$$\mu_D(x) = \begin{cases} \max \mu_D(x) & для\ x \in k; \\ 0 & для\ x \in k, \end{cases}$$

где k – множество тех точек в пространстве альтернатив X, для которых $\mu_D(x)$ функция имеет максимальное значение.

Если не все входящее в множество D цели и ограничения одинаково важны, то следует ввести весовые коэффициенты, характеризующие относительную важность различных целей и ограничений (оценочных элементов), тогда для функция принадлежности $\mu_D(x)$ вместо соотношения (1) следует писать:

$$\mu_D(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \mu_{G_i}(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(x) \mu_{C_j}(x), \qquad (2)$$

где α_i и β_j – весовые коэффициенты функций принадлежности.

Разработанная процедура принятия решений в расплывчатых условиях для формирования значений оценочных элементов включает следующие этапы:

1. Формирование набора лингвистических переменных для описания набора факторов оценки качества ПС.
2. Формирование термов – множеств названий лингвистических переменных, описывающих диапазоны изменения целей и ограничений оценочных элементов факторов оценки ПС.
3. Оценка функций принадлежности численных значений лингвистических переменных, определяющих субъективное мнение экспертов о величине оценочного элемента той или иной метрики.
4. Принятие решения о величине численного значения метрики исследуемого фактора на основании результатов обработки высказываний экспертов.

Рассмотренный метод обработки экспертных высказываний с использованием аппарата нечёткой логики позволяет принимать решение о значениях оценочных элементов ПС в случае, когда отсутствует возможность получить достоверную информацию о показателях оценочных элементов исследуемых факторов ПС.

Порядок и рекомендации по использованию нейронных сетей при оценке качества ПС

На первом этапе использования нейронных сетей пакета «Статистика» осуществляется выбор и расчёт оценочных факторов, а также подготовка необходимых таблиц, содержащих эталонные значения элементов оценочных факторов. При этом рекомендуется представить шкалу измерений в виде нескольких диапазонов, предусмотрев нужное количество столбцов в таблицах, которые будут необходимы для содержания данных в процессе обучении нейронной сети и формирования ответов в тестовых таблицах.

Рассмотрим основные этапы обучения и тестирования ПС с помощью нейронной системы на основании эталонных экспертных и тестовых данных оценочных элементов стандарта (ГОСТ 28195-89).

Основные этапы обучения и тестирования ПС с помощью нейронной системы предполагают выполнение следующих этапов:

– выбор оценочных элементов метрик стандарта качества ПС;

– определение диапазонов значений оценочных элементов (0-1), например:

0-0.33-Результат «Незадовільно»,

0.34-0.66-Результат «Задовільно»,

0.67-0.79- Результат «Добре»,

0.8-1- Результат «Відмінно»;

– формирование входных данных на основе оценочных элементов;

– обучение и тестирование нейронной сети на основании эталонных и тестовых данных оценочных элементов стандарта качества ПС.

На первом этапе создаём необходимые таблицы, в которые заносятся значения выбранных оценочных элементов (рис. 4).

Data: Дані для Сеть2(1) (5v by 20c)

	2 H0102	3 H0104	4 H0110	5 Результат
1	0,60	0,00	0,90	Задовільно
2	0,10	0,70	0,10	Задовільно
3	0,30	0,10	0,40	Незадовільно
4	1,00	0,80	0,70	Відмінно
5	0,40	0,70	0,50	Задовільно
6	0,80	0,60	0,10	Добре
7	0,90	0,60	0,60	Добре
8	0,80	0,20	0,10	Задовільно
9	0,20	0,70	0,70	Задовільно
10	0,20	0,40	0,40	Незадовільно
11	0,10	0,70	0,30	Задовільно
12	0,70	0,80	0,90	Відмінно
13	0,20	0,20	0,20	Незадовільно
14	0,20	0,90	0,20	Задовільно
15	0,70	0,20	0,10	Задовільно
16	0,70	0,70	0,50	Добре
17	0,90	1,00	0,80	Відмінно
18	0,40	0,70	0,20	Задовільно
19	0,50	0,90	0,00	Добре
20	0,30	0,30	0,00	Незадовільно

Data: Дані для Сеть3 (5v by 20c)

	1 Програми	2 H0102	3 H0104	4 H0110	5 Результат
1	MatLab	0,00	0,90	0,60	Задовільно
2	MatLab	0,70	0,10	0,10	Задовільно
3	MatLab	0,10	0,30	0,40	Незадовільно
4	MatLab	0,80	0,70	1,00	Відмінно
5	MatLab	0,70	0,50	0,40	Задовільно
6	MatLab	0,10	0,80	0,70	Добре
7	MatLab	0,60	0,90	0,60	Добре
8	MatLab	0,20	0,10	0,80	Задовільно
9	MatLab	0,70	0,70	0,20	Задовільно
10	MatLab	0,40	0,40	0,20	Незадовільно
11	Statistica	0,30	0,10	0,70	Задовільно
12	Statistica	0,90	0,70	0,80	Відмінно
13	Statistica	0,20	0,20	0,20	Незадовільно
14	Statistica	0,90	0,20	0,20	Задовільно
15	Statistica	0,10	0,70	0,20	Задовільно
16	Statistica	0,50	0,70	0,70	Добре
17	Statistica	1,00	0,80	0,90	Відмінно
18	Statistica	0,20	0,40	0,70	Задовільно
19	Statistica	0,00	0,50	0,90	Добре
20	Statistica	0,00	0,30	0,30	Незадовільно

Рис. 4 Входные данные для нейронных сетей

Подготовленные таблицы дают возможность перейти к созданию и последующему обучению нейронных сетей в целях оценки качества разработки ПС. Для этого в пакете используется вкладка «Статистика → Нейронные». В диалоговом окне «Нейронные сети» (Neural Networks) определяется тип задачи, переменные, которые используются в обучении нейронных систем и инструмент, используемый

системой для обучения сети. В данном случае сеть должна определить к какому из четырёх интервалов относятся значения («Незадовільно», «Задовільно», «Добре», «Відмінно»), и выбирается тип задачи «Классификация» (Classification).

На рис. 5 представлено окно, в котором определены переменные, необходимые для формирования нейронной сети.

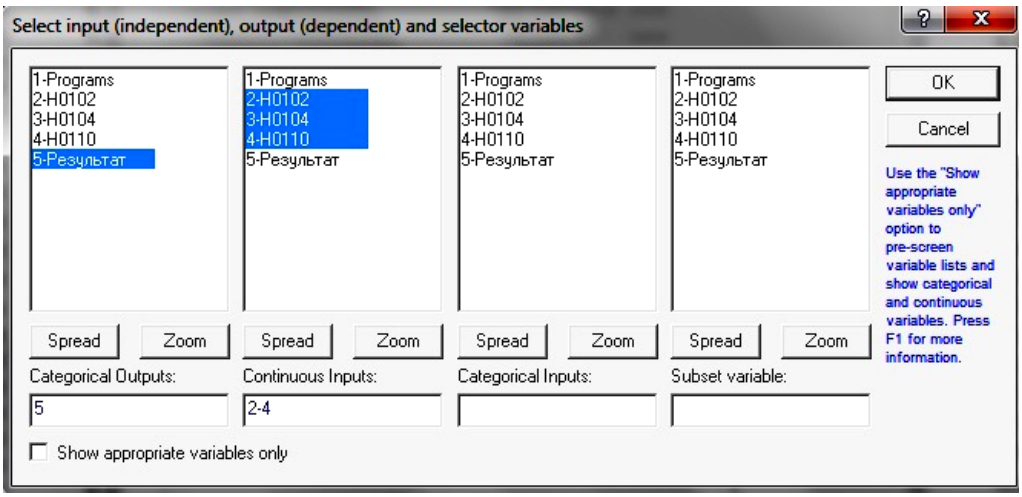


Рис. 5 Окно выбора переменных для нейронной сети

После определения типа задач и переменных, которые необходимы для построения и обучения сети рассматриваются варианты решения задачи обучения сети. Система предлагает два варианта построения сети: «Мастер решений» (IntelligentProblemSolver) и «Конструктор» (Constructor). В диалоговом окне (рис.6) задаются параметры для нейронной сети, Для данного типа задачи используется многослойный персептрон, а именно четырехслойный и трехслойный персептрон (TreelayerandFourlayerPerceptron). Выбравши «Тип сети» и вкладку «Границы» (Thresholds) задаётся правило, которое обеспечивает отбор данных и присвоение их одному из сформированных классов из интервала 0-1. Архитектура и сложность нейронной сети формируется системой на основе заданных максимальных и минимальных значений нейронов в промежуточных слоях при этом программа построит сети в заданных интервалах (рис.6).

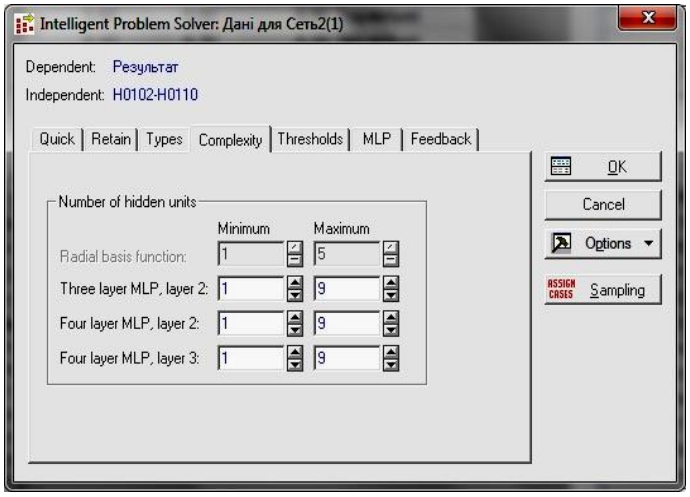


Рис. 6 Вкладка «Сложность» («Complexity») мастера решений

Введение необходимых параметров даёт возможность перейти к обучению нейронной сети. На рис.7 представлены результаты, характеризующие обученную сетью (сеть 32 имеет наилучшие показатели).

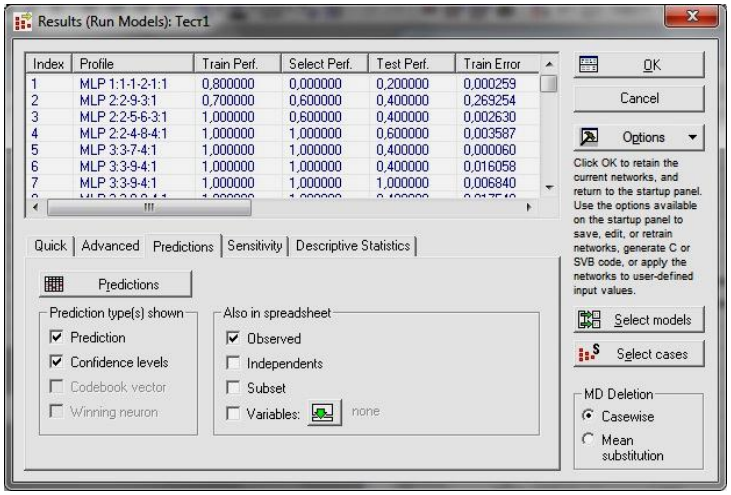
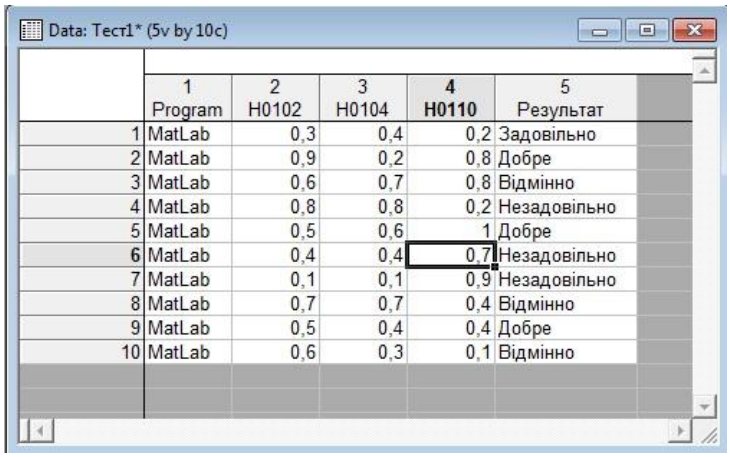


Рис.7. Результаты, характеризующие обученную нейронную сеть

Используя вкладку «Дополнительно» («Advanced») можно увидеть архитектуру нейронной сети. На рис. 8 приведены данные, характеризующие результаты тестовой проверки обученной нейронной сети.



Data: Тест1* (5v by 10c)

	1 Program	2 H0102	3 H0104	4 H0110	5 Результат
1	MatLab	0,3	0,4	0,2	Задовільно
2	MatLab	0,9	0,2	0,8	Добре
3	MatLab	0,6	0,7	0,8	Відмінно
4	MatLab	0,8	0,8	0,2	Незадовільно
5	MatLab	0,5	0,6	1	Добре
6	MatLab	0,4	0,4	0,7	Незадовільно
7	MatLab	0,1	0,1	0,9	Незадовільно
8	MatLab	0,7	0,7	0,4	Відмінно
9	MatLab	0,5	0,4	0,4	Добре
10	MatLab	0,6	0,3	0,1	Відмінно

Рис.8 Результаты тестовой проверки нейронной сети

Для проверки полученных результатов запускается модель обученной сети и выполняется проверка сети на основании тестовых данных оценочных элементов исследуемого ПС. При этом используется кнопка «Прогноз» (Predictions) (рис. 9).

Результат	Результат.32	Результат.Задовільно.32	Результат.Незадовільно.32	Результат.Відмінно.32	Результат.Добре.32
Задовільно	Незадовільно	0,005133	0,994826	0,000000	0,000040
Добре	Добре	0,000110	0,000004	0,000091	0,999794
Відмінно	Відмінно	0,000269	0,000000	0,998346	0,001385
Незадовільно	Добре	0,000027	0,000000	0,000011	0,999961
Добре	Відмінно	0,001189	0,000001	0,998569	0,000241
Незадовільно	Задовільно	0,999791	0,000147	0,000000	0,000062
Незадовільно	Незадовільно	0,000007	0,999993	0,000000	0,000000
Відмінно	Добре	0,000049	0,000000	0,000031	0,999920
Добре	Задовільно	0,999648	0,000114	0,000000	0,000238
Відмінно	Задовільно	0,999600	0,000250	0,000000	0,000150

Рис. 9 Результаты проверки нейронной сети

Столбец «Результат 32» содержит данные, характеризующие обученную нейронную сеть. Анализ данных показал, что получены достаточно корректные результаты, позволяющие оценить уровень разкаботки исследуемых ПС.

Выводы

Предлагаемый подход оценки качества программных средств, использующий основные положения стандарта (ГОСТ 28195-89), методику определения значений оценочных элементов метрик на основе аппарата нечёткой логики, систему нейронной сети может быть использован для оценки качества ПС.

Литература

1. ГОСТ 28195-89. Государственный стандарт СССР. Оценка качества программных средств. – Москва, 1989.
2. Боровиков В. STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: для профессионалов. – СПБ.: Питер, 2003. – 688 с.: ил.
3. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.
4. А. Кофман. Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982.

Стаття надійшла _14_._11_._2014___
Прийнято до друку _25_._11_._2014___

Анотація

Клюєв Є.І., Гріненко О.О.
Про один підхід оцінки якості програмних засобів

У статті розглянута можливість оцінки якості параметрів програмних засобів (ПЗ) на основі положень стандарту (Гост 28195-89), методу прийняття рішень в умовах наявності інформації, що не має певного характеру, і нейронних мереж.

Основне завдання даної роботи пов'язане з демонстрацією можливості використання нейронних мереж і методу прийняття рішення для оцінки якості параметрів програмних засобів, а також розглянуті основні положення стандарту (ГОСТ 28195-89) оцінки якості ПЗ, номенклатуру показників якості та основні положення методики оцінки якості ПЗ. Практично показана можливість використання пакета «Статистика» для оцінки якості параметрів ПЗ за допомогою нейронних мереж на основі вміння використовувати експертні та розрахункові методи оцінки якості ПЗ та знаходження загальної оцінки якості ПЗ по набору отриманих оцінок факторів якості.

Ключові слова: *якість програмних засобів; нейронні мережі; метод прийняття рішення.*

Summary

Klyuev E.I., Grinenko O.O.
An approach of software quality assessment

The article discusses the possibility of assessing the quality parameters of the software on the basis of the provisions of the standard (GOST 28195-89), the method of decision-making in the

presence of information that does not have a certain character, and neural networks.

The main objective of this work is related to the demonstration of the possibility of using neural networks and decision-making methods for evaluating the quality parameters of the software, and describes the main provisions of the standard (GOST 28195-89) for evaluating software quality, range of quality indicators and guidelines methodology for assessing software quality. Almost the possibility of using the package "Statistica" to assess the quality parameters of software using neural networks based on the ability to use expert and calculation methods for assessing software quality and overall assessment of the software quality on a set of obtained estimates of factors.

Key words: *software quality; neural networks; decision-making methods.*

НАШІ АВТОРИ

Богатирьов Олександр Олегович	кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної математики та інформатики Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького
Борода Аліна Олександрівна	студентка Сумського державного університету
Виноградов Анатолій Григорович	канд. фіз.-мат. наук, доцент Черкаського інституту пожежної безпеки ім. Героїв Чорнобиля Національного університету цивільного захисту України
Головня Борис Петрович	доктор техн. наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформатики Черкаського національного університету ім. Богдана Хмельницького
Гнатовська Ганна Арнольдівна	к.т.н., доцент кафедри інформатики Одеського державного екологічного університету
Гриненко Олена Олександрівна	старший викладач кафедри інженерії програмного забезпечення Інституту комп'ютерних інформаційних технологій Національного авіаційного університету
Гришко Людмила Веніамінівна	к.п.н., старший викладач кафедри прикладної математики та інформатики Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького
Ємець Олександра Олегівна	кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного моделювання і соціальної інформатики Полтавського університету економіки і торгівлі
Залевський Сергій Володимирович	к.т.н., доцент кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп’ютерної графіки Національного технічного університету України «КПІ»
Клюєв Євген Іванович	к.т.н., доцент кафедри інженерії програмного забезпечення Інституту комп'ютерних інформаційних технологій Національного авіаційного університету
Красношлик Наталія Олександрівна	к.т.н., доцент кафедри прикладної математики та інформатики Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького
Лукьянов Петр Володимирович	канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співр. Інституту гідромеханіки НАНУ

Назаренко Олександр Максимович	кандидат фіз.-мат. наук, доцент Сумського державного університету
Небилиця Юрій Миколайович	старший викладач кафедри інформаційних систем та медичних технологій Черкаського національного університету ім. Богдана Хмельницького
Ярмілко Андрій Васильович	старший викладач кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем Черкаського національного університету ім. Богдана Хмельницького
Яхно Олег Михайлович	доктор техн. наук, професор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут», заслужений діяч науки і техніки України

ЗМІСТ

СЕКЦІЯ «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

С.В. Залевський

МОДЕЛЮВАННЯ ЧАРУНКИ КООРДИНАТНОЇ СІТКИ U І V ПОВЕРХНЕЮ КУНСА І ПОБУДОВА ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ 3

Б.П.Головня

МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ТУРБУЛЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ 10

Н. А. Красношлык, А. О. Богатырёв

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ПРОВЕДЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ 20

А. О. Емец

ДОПУСКОВЫЕ РЕШЕНИЯ С РАЗНЫМ ТИПОМ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ДЛЯ НЕЧЕТКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ 34

Небилиця Ю.М.

ОПЕРАТИВНИЙ КОНТРОЛЬ ВІДХИЛЕНЬ ФОРМИ ПОВЕРХНІ ПРИ ЕЛЕКТРОЕРОЗІЙНОМУ ВИРІЗАННІ МЕТОДОМ ПАРАБОЛІЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ 45

О.М. Назаренко, А.О. Борода

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ МАКРОЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ 55

А.Г. Виноградов, О.М. Яхно

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КОНУСНОЙ РАСПЫЛЕННОЙ ВОДЯНОЙ СТРУИ 63

А.В. Ярмілко

ОТРИМАННЯ ТА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ПІРОМЕТРИЧНИХ ДАНИХ В ЗАДАЧАХ ДІАГНОСТИКИ ТА УПРАВЛІННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ 70

А.А. Гнатовская

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАИМЕНЬШЕЙ ВЕЛИЧИНЫ ИНТЕНСИВНОСТИ ОТКАЗОВ ДВУХКАСКАДНЫХ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ 81

Петр В. Лукьянов

ВЛИЯНИЕ ПРИСОЕДИНЕННОГО КОНЦЕВОГО ВИХРЯ ЛОПАСТИ РОТОРА ВЕРТОЛЕТА НА ГЕНЕРАЦИЮ BVI-ШУМА 90

СЕКЦІЯ «ІНФОРАТИКА»

L.V.Grishko

BASIC PROGRAMMING: COMPETENCE APPROACH 103

Е.И. Клюев, Е.А. Гриненко

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ 108

НАШІ АВТОРИ 121

CONTENTS

APPLSED MATHEMATICS SECTION

S. V. Zalevsky

ACCURACY ESTIMATION OF APPROXIMATION OF SURFACE SPECIFIED BY SYSTEMATIZED POINT FRAME 3

B.P.Golovnya

MODEL OF TURBULENT STRESSES TRANSFER 10

N. A. Krasnoshlyk, A. O. Bogatyrev

BASIC STAGES OF COMPUTER SIMULATION 20

O. O. Yemets`

ADMITABLE SOLUTIONS WITH THE DIFFERENT TYPE OF MEMBERSHIP FOR UNCERTAIN LINEAR SYSTEMS OF EQUATIONS 34

Yu. M. Nebylytsia

THE RAPID CONTROL OF THE FORM REJECTIONS OF SURFACE AT ELECTRO-EROSIVE CUTTING USING THE PARABOLIC APPROXIMATION METHOD 45

O.M. Nazarenko, A.O. Boroda

PARAMETRIC IDENTIFICATION OF MODELS OF DYNAMICAL INTERINDUSTRY BALANCE 55

A.G. Vinogradov, O.M. Yakhno

CALCULATION METHOD OF HYDRODYNAMIC PARAMETERS OF THE CONIC SPRAYED WATER JET 63

A.V. Yarmilko

OBTAINING AND INTERPRETATION OF THE PYROMETRIC DATA FOR THE PROBLEM OF DIAGNOSTICS AND CONTROLLING OF THE TECHNOLOGICAL PROCESSES 70

A.A. Gnatovskaya

MATHEMATICAL MODEL OF THE SMALLEST VALUE OF THE FAILURE RATE OF TWO-STAGE THERMOELECTRIC DEVICES 81

Petro V. Lukianov

INFLUENCE OF THE HELICOPTER'S ROTOR BLADE TIP BOUND VORTEX ON BVI-NOISE GENERATION 90

INFORMATICS SECTION

L.V.Grishko

BASIC PROGRAMMING: COMPETENCE APPROACH 103

Klyuev E.I., Grinenko O.O.

AN APPROACH OF SOFTWARE QUALITY ASSESSMENT 108

INFORMATION ABOUT AUTHORS 121

ВІСНИК
ЧЕРКАСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

Серія прикладна математика. Інформатика
№ 38 (331). 2014

Відповідальний за випуск:
Головня Б. П.

Відповідальний секретар:
Сердюк О. А.

Комп'ютерне верстання
Сердюк О. А.

Підписано до друку 29.12.2014. Формат 84x108/16.
Ум. друк. арк. 12,0. Тираж 300 пр. Зам. № 5235

Видавець і виготівник видавничий відділ
Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького
Адреса: 18000, м. Черкаси, бул. Шевченка, 81, кімн. 117,
Тел. (0472) 37-13-16, факс (0472) 37-22-33,
e-mail: vydav@cdu.edu.ua, http://www.cdu.edu.ua
Свідоцтво про внесення до державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК №3427 від 17.03.2009 р.